Математика

Методические рекомендации

5

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Математика

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

5 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

2-е издание, доработанное

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
М34

16+

Авторы:

С. Б. Суворова, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова

М34 **Математика.** Методические рекомендации. 5 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / [С. Б. Суворова, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова]. — 2-е изд., дораб. — М. : Просвещение, 2017. — 192 с. : ил. — ISBN 978-5-09-042991-7.

Пособие предназначено для учителей, ведущих преподавание по УМК «Математика. 5 класс» под редакцией Г. В. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина, который включает учебник, дидактические материалы, рабочие тетради, тематические тесты, контрольные работы, методические рекомендации и устные упражнения.

Учебное пособие содержит методические комментарии к каждой главе учебника, рекомендации к решению упражнений, примерное распределение материала всех книг комплекта по изучаемым темам.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-042991-7

Введение

Цель учебного пособия — дать возможность учителю глубже понять идеологию и основные методические идеи курса математики, реализуемого в линии учебников для 5—6 классов под редакцией Г. В. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина, помочь в ежедневной работе по подготовке к урокам, обеспечить практическим и методическим материалом для организации контроля и оценки знаний учащихся.

Пособие состоит из трёх разделов. В первом из них — в разделе «Общая характеристика курса математики 5—6 классов» — излагается концепция курса, описывается состав учебно-методического комплекта и функции каждого из входящих в него пособий, даётся характеристика содержания и методических особенностей комплекта, приводится перечень планируемых результатов обучения математике в 5—6 классах.

Раздел «Поурочное планирование учебного материала» послужит учителю основой для организации и распределения учебного времени.

Раздел «Рекомендации по организации учебного процесса» построен в соответствии со структурой учебника. В этом разделе к каждой главе учебника приводятся:

- примерное поурочное планирование учебного материала, представленное в виде таблицы, включающей характеристику основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий);
- основные цели, которые характеризуют требования к усвоению материала главы и выделяют обязательные результаты обучения;
- обзор главы, в котором даётся общая характеристика её содержания и методических особенностей, раскрываются причины, по которым принят тот или иной подход к изложению материала, показываются связи изучаемой темы с предыдущим и последующим материалом.

Далее к каждому пункту учебника даны:

• *методический комментарий*, в котором содержатся необходимые рекомендации по объяснению материала, приводятся предложения по организации обсуждения, обращается внимание на возможные ошибки учащихся и пути их предупреждения, предлагаются дополнительные вопросы, задания, упражнения и др.;

• *комментарий к упражнениям*, в котором содержатся рекомендации по работе с конкретными упражнениями, рассматриваются различные способы решения, предлагаются вопросы, которые целесообразно поставить перед учащимися.

В конце книги приводится Приложение «Дополнительные материалы для занятий с учащимися». В нём содержится несколько математических сюжетов, доступных для учащихся 10—11 лет и направленных на углубление и расширение знаний учащихся, знакомство с новыми математическими идеями, обогащение историко-культурологических представлений.

Общая характеристика курса математики 5—6 классов

Концепция курса

Учебно-методические комплекты «Математика. 5 класс» и «Математика. 6 класс» — составная часть единой линии УМК по математике для 5—9 классов, в которых преемственные связи прослеживаются не только в содержательном плане, но и в методических подходах.

К общим идеям, составляющим основу концепции курса, относятся:

- интеллектуальное развитие учащихся средствами математики;
- ознакомление с математикой как частью общечеловеческой культуры;
- развитие интереса к математике;
- использование педагогических технологий, обеспечивающих понимание изучаемого материала; внимание и мотивации;
- создание условий для дифференциации обучения;
- внимание к практико-ориентированному знанию.

Центральная идея — *интеллектуальное развитие учащихся средствами математики*, и прежде всего таких его компонентов, как интеллектуальная восприимчивость, способность к усвоению новой информации, подвижность и гибкость, независимость мышления. Эта идея полностью коррелирует с идеологией новых образовательных стандартов, в которых ставится задача эффективного использования потенциала школьных предметов для развития личностных качеств обучаемых.

Идея развивающего обучения реализуется в учебниках через систему методических решений. УМК содержит достаточный и специальным образом организованный учебный материал (теорию и задачи), обеспечивающий формирование универсальных учебных действий. Школьники имеют возможность овладевать исследовательскими и логическими действиями, предполагающими умение видеть проблему, ставить вопросы, наблюдать и проводить эксперименты, делать несложные выводы и умозаключения, обосновывать и опровергать утверждения, сравнивать и классифицировать.

Эффективности интеллектуального развития способствует осознание самого *процесса мыслительной деятельности* (механизмов рассуждений, умозаключений). Поэтому в доработанных в соответствии с ФГОС изданиях учебников инициируется рефлексия, акцентируется внимание на собственно процессе решения задачи.

Развитие мышления тесно связано с речью, со способностью грамотно говорить, правильно выражать свои мысли. Свидетельством чёткого и организованного мышления является грамотный математический язык. Обучение математическому языку, как специфическому средству коммуникации в его сопоставлении с реальным языком, авторы считают важнейшей задачей обучения, для решения которой используются адекватные методические приёмы.

Отличительной особенностью данного УМК является внимание к развитию и формированию различных видов мышления. Этому, в частности, способствует включение в курс большего, чем это бывает традиционно, объёма геометрического материала. Изучая геометрию, учащиеся начинают последовательное продвижение в развитии мышления от конкретных, практических его форм до абстрактных, логических.

Серьёзное внимание в УМК уделяется формированию личностно-ценностного отношения к математическим знаниям, развитию интереса к предмету, знаниям культурологического характера. Авторы ставят целью доступное, живое изложение содержания курса, создание учебников, которые можно читать.

Состав учебно-методического комплекта

Учебники предъявляют содержание и идеологию курса, обеспечивают организацию учебного процесса:

Дорофеев Г. В., Шарыгин И. Ф., Суворова С. Б. и др. Математика. 5 класс / Под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. — М.: Просвещение, 2012—2016.

Дорофеев Г. В., Шарыгин И. Ф., Суворова С. Б. и др. Математика. 6 класс / Под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. — М.: Просвещение, 2013—2016.

Рабочая тетрадь — пособие с печатной основой для работы непосредственно на содержащихся в нём заготовках; применяется преимущественно на первоначальных этапах изучения темы с целью увеличения объёма практической деятельности и разнообразия содержания и форм работы:

Бунимович Е. А., Кузнецова Л. В., Рослова Л. О. Математика. Рабочая тетрадь. 5 класс. В 2 ч. — М.: Просвещение, 2013—2016.

Бунимович Е. А., Кузнецова Л. В., Рослова Л. О. Математика. Рабочая тетрадь. 6 класс. — М.: Просвещение, 2014—2016.

Дидактические материалы предназначены для организации самостоятельной дифференцированной работы учащихся; включают обучающие работы, содержащие задания разного уровня сложности, и небольшие проверочные работы, в том числе тесты с выбором ответа, снабжённые ключом — перечнем верных ответов:

Кузнецова Л. В., Минаева С. С., Рослова Л. О. и др. Математика. Дидактические материалы. 5 класс. — М.: Просвещение, 2014—2016.

Кузнецова Л. В., Минаева С. С., Рослова Л. О. и др. Математика. Дидактические материалы. 6 класс. — М.: Просвещение, 2015—2016.

Тематические тесты предназначены для текущего оперативного контроля при изучении курса:

Кузнецова Л. В., Минаева С. С., Рослова Л. О. и др. Математика. Тематические тесты. 5 класс. — М.: Просвещение, 2013—2016.

Кузнецова Л. В., Минаева С. С., Рослова Л. О. и др. Математика. Тематические тесты. 6 класс. — М.: Просвещение, 2014—2016.

Контрольные работы — пособие, в котором содержатся материалы для тематического контроля (зачёты в четырёх вариантах), итоговые контрольные работы (полугодовые и годовые), итоговые тесты:

Кузнецова Л. В., Минаева С. С., Рослова Л. О. и др. Математика. Контрольные работы. 5 класс. — М.: Просвещение, 2014—2016.

Кузнецова Л. В., Минаева С. С., Рослова Л. О. и др. Математика. Контрольные работы. 6 класс. — М.: Просвещение, 2015—2016.

Устные упражнения — пособие, предназначенное для работы на уроке при изучении нового материала и при повторении пройденного:

Минаева С. С. Математика. Устные упражнения. 5 класс. — М.: Просвещение, 2016.

Минаева С. С. Математика. Устные упражнения. 6 класс. — М.: Просвещение, 2016.

Методические рекомендации — пособие для учителей, предназначенное помочь им в овладении идеологией и основными методическими идеями курса, облегчить ежедневную работу по подготовке к урокам:

Суворова С. Б., Кузнецова Л. В., Минаева С. С. и др. Математика. Методические рекомендации. 5 класс. — М.: Просвещение, 2013—2016 (размещено на сайте www.prosv.ru).

Суворова С. Б., Кузнецова Л. В., Минаева С. С. и др. Математика. Методические рекомендации. 6 класс. — М.: Просвещение, 2013—2016 (размещено на сайте www.prosv.ru).

Характеристика содержания курса

В учебниках для 5—6 классов представлены следующие содержательные линии раздела Примерной основной общеобразовательной программы (ПООП) основного общего образования «Содержание курса» сборника рабочих программ по математике[1]: *Числа, Алгебра, Геометрия, Статистика и теория вероятностей, Логика и множества*. Кроме того, при изложении основного содержания в учебниках там, где возможно, органично присутствует историко-культурологический фон, что способствует формированию у школьников представлений о роли математики в развитии цивилизации.

При изучении *материала числовой линии* развиваются и систематизируются знания учащихся о натуральных числах, изучаются обыкновенные и десятичные дроби, положительные и отрицательные числа. При этом сохранены методические решения, оправдавшие себя в практике преподавания.

Изучение обыкновенных дробей предшествует изучению десятичных дробей, что усиливает логическую составляющую курса — правила действий с десятичными дробями обосновываются уже известными алгоритмами выполнения действий с обыкновенными дробями. Серьёзное внимание в учебниках уделяется формированию вычислительной культуры; учащиеся знакомятся с различными приёмами вычислений, учатся выбирать рациональные способы, обучаются приёмам прикидки и оценки.

При введении положительных и отрицательных чисел сначала строится множество целых чисел. Это позволяет на простом материале с широким привлечением наглядности рассмотреть все арифметические операции и правила знаков. Затем рассматриваются рациональные числа, и это становится уже вторым проходом в осознании всех принципиальных особенностей оперирования с положительными и отрицательными числами, что, как показывает опыт, облегчает восприятие материала и способствует прочности приобретаемых навыков.

Значительное место в учебниках отводится решению текстовых задач арифметическим способом. Это способствует развитию умения анализировать условие задачи, устанавливать связи между входящими в него величинами, выстраивать логические цепочки, приводящие к ответу на поставленный вопрос.

---

[1] Примерные программы по учебным предметам. Математика. 5—9 классы. 3-е изд. — М.: Просвещение, 2011. — (Стандарты второго поколения).

Согласно авторской концепции, изучение арифметического материала будет продолжено в 7 классе, куда отнесены такие вопросы, как прямо пропорциональные и обратно пропорциональные зависимости, и где получают дальнейшее развитие умения выполнять процентные вычисления, применять их в практических ситуациях, совершенствуются навыки выполнения действий с дробями.

Изучение *элементов алгебры* в курсе 5—6 классов решается следующим образом. В учебниках начиная с 5 класса последовательно используется буквенная символика: буквы применяются для обозначения чисел, для записи общих утверждений. Уделяется внимание конструированию числовых и буквенных выражений, вычислению значений буквенных выражений. В учебник для 6 класса включена специальная тема «Выражения, формулы и уравнения», акцент в которой сделан на содержательную работу с формулами, выражениями, уравнениями — составление формул и вычисление по формулам, выражение из формул одних величин через другие, перевод задач на язык выражений, формул и уравнений. Что касается преобразований буквенных выражений, то в этом звене рассматриваются лишь простейшие. А систематическое изучение этого материала в 5—6 классах мы считаем неэффективным и поэтому относим его уже к 7 классу, где возрастные возможности учащихся в большей степени соответствуют усвоению формальных операций.

В учебниках значительное место отводится *наглядной геометрии*. В них включён весь материал, представленный соответствующим разделом Примерных программ. Учащиеся знакомятся с фигурами и их конфигурациями на плоскости и в пространстве, учатся изображать эти фигуры, овладевают некоторыми приёмами построения геометрических фигур, изучают их свойства. Геометрические вопросы равномерно распределены по курсу, и их изучение перемежается с изучением арифметических вопросов, что, по мнению авторов, более эффективно с точки зрения усвоения материала.

В соответствии с психологическими особенностями детей этого возраста большая роль в изучении геометрического материала отводится практической деятельности, эксперименту; по мере приобретения учащимися геометрического опыта в курсе увеличивается роль несложных доказательных рассуждений. В процессе решения геометрических задач от учащихся требуется «увидеть» геометрический объект по его словесному описанию или графическому изображению (рисунку, проекционному чертежу, развёртке), мысленно изменить пространственное положение объекта, представить проекции или сечения и др.

Как показала практика, к началу изучения систематического курса геометрии в 7 классе у учащихся накапливается богатый запас геометрических знаний и представлений, позволяющих легче и увереннее, чем обычно, воспринимать этот курс.

Линия содержания *«Статистика и теория вероятностей»* представлена в учебниках начиная с 5 класса. Учащиеся учатся решать комбинаторные задачи путём перебора возможных вариантов, приобретают элементарные умения, связанные со сбором и представлением информации с помощью таблиц и диаграмм.

В 6 классе вводятся предусмотренные программой простейшие теоретико-множественные понятия. Теоретико-множественный язык и символика здесь и далее органично включаются в основное содержание курса. Содержание курса 5—6 классов даёт богатые возможности для последовательного совершенствования логической культуры и языка: формулируются утверждения со связками «если ..., то ...», «в том и только том случае», учащиеся работают с примерами и контрпримерами, распознают верные и неверные высказывания. При изучении теории и выполнении упражнений учащимся часто приходится проводить доказательные рассуждения.

Методические особенности и методический аппарат

Стандарт нацеливает на достижение учащимися личностных, метапредметных и предметных результатов освоения основной образовательной программы. Методический аппарат учебников строится таким образом, чтобы обеспечить достижение этих результатов.

К *методическим особенностям* учебников относятся:

- мотивированное и доступное изложение теоретических сведений, формирование понятий на содержательной основе, широкое использование наглядности, опора на здравый смысл, повышение роли интуиции и воображения как основы для формирования математического мышления и интеллектуальных способностей;
- создание широкого круга математических представлений, лежащих в основе общей культуры человека;
- организация разнообразной практической деятельности, способствующей как формированию умений, так и эффективному умственному развитию, а также способности применять полученные знания в жизненных ситуациях;
- структурирование содержания курса по спирали, что позволяет возвращаться к изученному материалу на новом уровне, включать знания в новые связи, формировать их в системе;

• личностно ориентированный стиль изложения, привлечение современных сюжетов, близких жизненному опыту учащихся, в теории и задачном материале, что является средством создания продуктивной мотивации к занятиям математикой;

• реализация технологии уровневой дифференциации, позволяющей для каждого учащегося добиться оптимальных результатов в усвоении курса.

Всё содержание учебников разбито на главы, каждая глава открывается небольшим вступлением, которое вводит учащегося в круг рассматриваемых проблем, создаёт определённую мотивацию. Главы подразделяются на пункты, каждый из которых включает объяснительный текст и упражнения.

Объяснительный текст пункта разбит на смысловые фрагменты, завершающиеся вопросами и заданиями для учащихся, которые позволяют проверить, понято ли прочитанное, акцентировать внимание на главном. Их задача — организовать работу учащегося с учебным текстом (поиск информации в тексте, переформулировка, воспроизведение утверждений, приведение своих примеров и др.).

Методический аппарат учебников ориентирован на формирование у учащихся способности к осознанному выбору уровня овладения материалом, индивидуальной траектории учебной деятельности. Этому способствует выделение в системе упражнений групп **А** (базовый уровень) и **Б** (более высокие уровни). Диапазон сложности заданий широк и достаточен для работы с учащимися, имеющими разные уровни подготовки. В конце каждой главы формулируются планируемые результаты обучения, приводятся образцы заданий, характеризующих обязательный уровень усвоения; учащиеся нацеливаются на осознание того, что ещё, кроме отмеченного, они способны сделать.

Ряд заданий снабжён «указателями», которые выделяют в системе упражнений сквозные рубрики. Тем самым акцентируется определённый вид учебной деятельности. Это позволяет ученику стать активным субъектом учения в плане освоения универсальных учебных действий. Так, задания, снабжённые указателями «Работаем с символами», «Действуем по правилу», выполняются на этапе введения новых элементов математического языка, закрепления нового алгоритма. Через задания рубрики «Верно или неверно» учащиеся целенаправленно обучаются приёмам самоконтроля и самопроверки при изучении самых разных разделов. Кроме того, они учатся распознавать верные и неверные утверждения, опровергать неверные утверждения с помощью контрпримера.

Система упражнений насыщена заданиями, направленными на формирование способности учащихся к интеллектуальной деятельности. Выделены специальные рубрики «Рассуждаем», «Анализируем», «Исследуем», «Ищем закономерность» и др. Учащиеся в ходе выполнения упражнений обучаются некоторым приёмам доказательных рассуждений, учатся проводить обоснования со ссылкой на правила, свойства и признаки.

В курсе математики 5—6 классов учебная цель, как правило, — решение математической задачи. Формирование умения самостоятельно найти идею решения, спланировать ход решения — серьёзная методическая проблема. Чтобы помочь учащемуся приступить к решению, в учебниках ряд задач снабжён советами, указаниями и подсказками, которые помогают ученику увидеть идею решения и начать решение. Через рубрику «Разбираем способ решения» учащиеся получают возможность познакомиться с идеей нового способа, разобраться в её применении и воспользоваться в решении последующих задач. В учебниках постоянно подчёркивается возможность действовать при решении задач разными способами, применять различные приёмы и алгоритмы, при этом учащемуся предоставляется право выбирать тот способ, который ему более удобен и понятен.

В конце каждого пункта помещена группа упражнений для повторения, обозначенная буквой **П**. Наличие этой рубрики поможет учителю целенаправленно организовать соответствующую работу.

Заключительный структурный элемент каждой главы — фрагмент «Чему вы научились», который позволяет ученику самостоятельно проверить, достиг ли он уровня обязательных требований, обнаружить пробелы, осознать свои возможности при выполнении более сложных заданий. Учащийся может по ходу изучения материала главы или при подведении итогов соотнести свои умения с требуемыми и при необходимости скорректировать их при подготовке к контролю.

С целью воспитания культуры работы с книгой, обучения поиску необходимой информации в конце учебника даётся предметный указатель.

Компьютерное обеспечение

Компьютерная поддержка курса математики создаёт принципиально новые (дополнительные) возможности для организации усвоения содержания курса. Она позволяет не только обогатить содержание, но и обеспечить новые активные формы и способы овладения им.

К данному курсу существует *Электронная форма учебника (ЭФУ)* — соответствующая по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника, содержащая интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие содержание учебника.

Функциональные особенности ЭФУ:

- удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;
- работа в онлайн- и офлайн-режимах;
- тестовые задания к каждой теме, разделу учебника;
- возможность изменения размера шрифта, создания заметок и закладок.

Педагогические возможности использования ЭФУ:

- организация контроля и самоконтроля по результатам изучения темы;
- реализация технологий мобильного, дистанционного или смешанного обучения;
- реализация требований ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

На сайте http://school-collection.edu.ru есть электронное издание (ЭИ) «Математика, 5—11 классы», созданное по заказу Национального фонда подготовки кадров под руководством канд. физ.-мат. наук В. А. Булычёва при участии авторов учебников по математике Г. В. Дорофеева, С. Б. Суворовой, С. С. Минаевой, Л. О. Рословой.

Не подменяя собой учебник или другие учебные пособия, ЭИ обладает собственными дидактическими функциями:

- предъявление подвижных зрительных образов в качестве основы для осознанного овладения математическими фактами; особенное значение это приобретает на этапе введения нового знания;
- отработка в интерактивном режиме базовых умений;
- усиление значимости и повышение удельного веса в учебном процессе исследовательской деятельности учащихся;
- возможность увеличения объёма предъявляемой для изучения информации, а также собственной практической деятельности ученика;
- увеличение доли содержательной работы ученика за счёт снятия проблем технического характера.

Мультимедийная среда организована таким образом, что при обучении математике более значимыми становятся наблюдение, разного рода эксперименты, математическое моделирование, конструирование. ЭИ содержит список виртуальных лабораторий, включающих инструментарий, который может использоваться учеником как при решении упражнений, снабжая его соответствующим компьютерным инструментом, так и для самостоятельного изучения возможностей применения этого инструментария. Кроме того, учитель может подготовить с помощью любой из виртуальных лабораторий набор собственных примеров для демонстрации и объяснения материала.

Учебный материал распределён в ЭИ по содержательным линиям. Внутри содержательной линии основной информационной единицей является тема, которая подразделяется на пункты. Пункт включает «Основные сведения» — краткий справочный материал, «Знакомство с инструментарием» — звуковое описание, демонстрация возможностей и задания, позволяющие овладеть инструментарием, «Упражнения», в ходе выполнения которых осваивается содержание. В него включены также методические рекомендации учителю по работе с мультимедиакомплексом.

Инструментарий, применяемый в ЭИ, весьма разнообразен, прост в употреблении и вполне адекватен целям обучения математике. Приведём примеры. При изучении темы «Делимость чисел» для усиления внимания к идейным аспектам этой сложной темы (за счёт снятия проблем технического характера и создания условий для наблюдения, экспериментирования, обеспечения возможности работы с обширным числовым материалом) используется следующий набор компьютерных инструментов из виртуальной лаборатории «Делимость чисел»: «Деление с остатком», «Разложение на два множителя», «Разложение на простые множители» и диаграмма «Количество простых делителей».

Активно используются средства виртуальных лабораторий в наглядной геометрии, в частности, для решения задач на равносоставленность, путём составления заданных фигур из предложенных частей; для построения проекционных изображений многогранников на основе их интерактивных 3D-моделей; для реконструкции модели многогранника по её проекционному изображению. При изучении дробей и процентов используется инструментарий, названный условно «Квадрат» и «Круг». Эти дидактические средства красочны и привлекательны для учеников, создают положительный эмоциональный фон в усилении роли наглядности и создании предпосылок для использования содержательных подходов при введении основных понятий и их применения.

В указанном ЭИ имеется инструментарий, используемый в теме «Таблицы и диаграммы», при изучении которой важно научить школьников адекватно воспринимать информацию, заданную в табличной или графической форме; быстро извлекать из таблиц и диаграмм информацию, необходимую для ответа на конкретный вопрос (или определять отсутствие таковой); самостоятельно представлять статистические данные в виде таблиц и диаграмм, наиболее удобных для восприятия.

Особый вид упражнений, так называемый «Экспресс-контроль», предназначен для проверки важных практических умений, которыми должен владеть каждый учащийся. Каждый ученик получает один из шести вариантов контрольных заданий, выбранный случайным образом. В ЭИ реализована система общения учителя с учениками в виде классного журнала, одна из функций которого состоит в получении решения ученика на экране компьютера у учителя (причём не только ответа, но и состояния лаборатории).

Планируемые результаты обучения математике в 5—6 классах

Этот раздел подготовлен на основе соответствующего раздела Примерной программы. При этом для удобства учителя включённые в программу предметные результаты детализированы и конкретизированы с учётом содержательно-методических особенностей данных учебников. Из этих же соображений несколько изменена структура раздела. Так, блоки «Ученик научится» и «Ученик получит возможность...» даны один за другим к каждой линии курса; планируемые результаты к блоку «Текстовые задачи» распределены по другим содержательным линиям курса.

Элементы теории множеств и математической логики

Ученик научится:

- оперировать понятием «множество» и рядом связанных с ним понятий, а также соответствующей символикой;
- задавать множества в несложных случаях перечислением элементов, словесным описанием;
- находить в простейших ситуациях объединение и пересечение множеств;
- формулировать математические факты с использованием связок «если ..., то ...», «в том и только том случае»;
- оперировать понятиями «пример» и «контрпример».

Ученик получит возможность:

- изображать отношения между множествами с помощью кругов Эйлера;

- распознавать истинные и ложные высказывания;
- определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать;
- проводить несложные доказательные рассуждения.

Числа

Натуральные числа. Дроби

Ученик научится:

- понимать особенности десятичной системы счисления;
- понимать и использовать термины и символы, связанные с понятием степени числа; вычислять значения выражений, содержащих степень с натуральным показателем;
- применять понятия, связанные с делимостью натуральных чисел, использовать признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10 при выполнении вычислений, для разложения числа на простые множители;
- оперировать понятием обыкновенной дроби, выполнять вычисления с обыкновенными дробями;
- оперировать понятием десятичной дроби, выполнять вычисления с десятичными дробями;
- понимать и использовать различные способы представления дробных чисел; переходить от одной формы записи чисел к другой, выбирая подходящую для конкретного случая форму;
- оперировать понятиями отношения, пропорции и процента;
- решать арифметическим способом текстовые задачи разных типов, в том числе задачи на части, на движение, на совместную работу;
- решать задачи основных видов на дроби и проценты;
- применять сформулированные умения в практических ситуациях, в том числе требующих выбора нужных данных или поиска недостающих.

Ученик получит возможность:

- познакомиться с признаками делимости на 4, 6, 8, 25, 11;
- использовать понятия НОК и НОД при решении задач;
- выполнять простейшие умозаключения на основе свойств и признаков делимости;
- исследовать числовые закономерности и устанавливать свойства чисел на основе наблюдения, проведения числового эксперимента;
- применять разнообразные приёмы рационализации вычислений.

Рациональные числа

Ученик научится:

• распознавать различные виды чисел: натуральное, положительное, отрицательное, дробное, целое, рациональное; правильно употреблять и использовать термины и символы, связанные с рациональными числами;

• отмечать на координатной прямой точки, соответствующие заданным числам; определять координату отмеченной точки;

• сравнивать и упорядочивать рациональные числа;

• выполнять вычисления с положительными и отрицательными числами.

Ученик получит возможность:

• выполнять вычисления с рациональными числами; оценивать результаты вычислений при решении задач с практическим содержанием;

• использовать приёмы, рационализирующие вычисления;

• контролировать вычисления, выбирая подходящий для ситуации способ.

Измерения, приближения, оценки

Ученик научится:

• округлять натуральные числа и десятичные дроби;

• работать с единицами измерения величин; выполнять прикидку и оценку результатов вычислений;

• интерпретировать ответ задачи в соответствии с поставленным вопросом.

Ученик получит возможность:

• использовать в ходе решения задач представления, связанные с приближёнными значениями величин.

Алгебра

Числовые и буквенные выражения

Ученик научится:

• использовать буквы для записи общих утверждений (например, свойств арифметических действий, свойств нуля при умножении), правил, формул;

• составлять числовые и буквенные выражения по заданным условиям;

• в несложных случаях вычислять значение буквенного выражения при указанных значениях букв.

Ученик получит возможность:

• применять свойства арифметических действий для преобразования числовых выражений;

• приобрести начальный опыт выполнения простейших преобразований буквенных выражений;

• выполнять работу с формулами: вычислять по формулам, в том числе используемым в реальной практике; составлять формулы по условиям, заданным задачей или чертежом.

Уравнения

Ученик научится:

• употреблять термины: уравнение, корень уравнения; проверять подстановкой, является ли данное число корнем уравнения;

• решать простейшие уравнения на основе зависимости между компонентами действия.

Ученик получит возможность:

• переводить условия текстовых задач на алгебраический язык, составлять соответствующее уравнение.

Координаты

Ученик научится:

• выполнять стандартные процедуры на координатной плоскости: строить точки по заданным координатам, находить координаты отмеченных точек.

Ученик получит возможность:

• познакомиться с идеей координат, с примерами использования координат в реальной жизни.

Статистика и теория вероятностей

Описательная статистика

Ученик научится:

• работать с информацией, представленной в форме таблицы, столбчатой или круговой диаграммы.

Ученик получит возможность:

• понять, что одну и ту же информацию можно представить в разной форме (в виде таблиц или диаграмм), и выбрать для её интерпретации более наглядное представление;

• составлять на основе данных таблицы, строить диаграммы;
• решать несложные комбинаторные задачи способом перебора вариантов.

Геометрия

Наглядная геометрия

Ученик научится:

• распознавать на чертежах, рисунках, в окружающем мире плоские геометрические фигуры, конфигурации фигур, описывать их, используя геометрическую терминологию и символику, описывать свойства фигур;

• распознавать на чертежах, рисунках, в окружающем мире пространственные геометрические фигуры, описывать их, используя геометрическую терминологию, описывать свойства фигур; распознавать развёртки куба, параллелепипеда, пирамиды, цилиндра и конуса;

• изображать геометрические фигуры и конфигурации с помощью чертёжных инструментов и от руки, на нелинованной и клетчатой бумаге;

• измерять с помощью инструментов и сравнивать длины отрезков и величины углов, строить отрезки заданной длины и углы заданной величины;

• выполнять простейшие умозаключения, опираясь на знание свойств геометрических фигур, на основе классификаций углов, треугольников, четырёхугольников;

• вычислять периметры многоугольников, площади прямоугольников, объёмы параллелепипедов;

• распознавать на чертежах, рисунках, находить в окружающем мире и изображать: симметричные фигуры; две фигуры, симметричные относительно прямой; две фигуры, симметричные относительно точки;

• выполнять в несложных ситуациях измерения реальных объектов и необходимые вычисления для решения задач из повседневной жизни.

Ученик получит возможность:

• исследовать и описывать свойства геометрических фигур (плоских и пространственных), используя наблюдение, измерение, эксперимент, моделирование, в том числе компьютерное моделирование и эксперимент;

- конструировать геометрические объекты, используя бумагу, пластилин, проволоку и т. д.;
- конструировать орнаменты и паркеты, изображая их от руки, с помощью инструментов, а также используя компьютер;
- определять вид простейших сечений пространственных фигур, получаемых путём предметного или компьютерного моделирования.

История математики

Ученик получит возможность:

- узнать о зарождении и проникновении в жизнь десятичной системы счисления; познакомиться с римской нумерацией как примером непозиционной системы;
- познакомиться с историей появления дробей и способами их записи, с историей изобретения десятичных дробей и их связи с метрической системой мер;
- узнать об открытии отрицательных чисел и его значении для развития математики и других наук;
- познакомиться с распространенными версиями происхождения некоторых математических терминов и символом;
- узнать имена некоторых великих учёных разных эпох и народов, внёсших вклад в становление и развитие математики, а также с рядом знаменитых исторических задач и легенд (задача о шахматной доске и др.).

Поурочное планирование учебного материала

Приводимое ниже поурочное планирование носит рекомендуемый характер. Оно отражает некоторый усреднённый опыт, и, естественно, в конкретном классе при конкретных условиях число уроков на изучение того или иного пункта, главы может меняться. Тем не менее мы считаем целесообразным помещение его в пособие, так как оно служит своего рода ориентиром как для учителя, впервые ведущего преподавание по данному учебному комплекту, так и для опытного учителя. Поурочное планирование поможет увидеть, насколько сильно вы отстаёте или опережаете основную группу классов. Если на изучение какого-либо материала у вас уходит существенно больше времени, чем рекомендовано в планировании, это должно послужить сигналом о том, что вы слишком задерживаетесь на этом вопросе, поэтому следует пересмотреть свой план и опустить ряд задач (оставить их для последующего повторения или не рассматривать вовсе).

1-й вариант: 5 уроков в неделю, всего 170 уроков
2-й вариант: 6 уроков в неделю, всего 204 урока

Глава и пункт учебника	Число уроков	
	1-й вариант	**2-й вариант**
Глава 1. Линии	**8**	**10**
1.1. Разнообразный мир линий	1	1
1.2. Прямая. Части прямой. Ломаная	2	2
1.3. Длина линии	2	3
1.4. Окружность	2	3
Обзор и контроль	1	1
Глава 2. Натуральные числа	**13**	**16**
2.1. Как записывают и читают натуральные числа	2	2
2.2. Натуральный ряд. Сравнение натуральных чисел	2	2
2.3. Числа и точки на прямой	2	3
2.4. Округление натуральных чисел	2	2
2.5. Решение комбинаторных задач	3	5
Обзор и контроль	2	2

Продолжение

Глава и пункт учебника	Число уроков	
	1-й вариант	2-й вариант
Глава 3. Действия с натуральными числами	**22**	**26**
3.1. Сложение и вычитание	3	4
3.2. Умножение и деление	5	6
3.3. Порядок действий в вычислениях	4	5
3.4. Степень числа	3	3
3.5. Задачи на движение	4	5
Обзор и контроль	3	3
Глава 4. Использование свойств действий при вычислениях	**12**	**15**
4.1. Свойства сложения и умножения	2	3
4.2. Распределительное свойство	3	3
4.3. Задачи на части	3	4
4.4. Задачи на уравнивание	2	3
Обзор и контроль	2	2
Глава 5. Углы и многоугольники	**9**	**11**
5.1. Как обозначают и сравнивают углы	2	2
5.2. Измерение углов	3	4
5.3. Ломаные и многоугольники	2	3
Обзор и контроль	2	2
Глава 6. Делимость чисел	**15**	**17**
6.1. Делители и кратные	3	4
6.2. Простые и составные числа	2	2
6.3. Свойства делимости	2	2
6.4. Признаки делимости	3	4
6.5. Деление с остатком	3	3
Обзор и контроль	2	2
Глава 7. Треугольники и четырёхугольники	**10**	**13**
7.1. Треугольники и их виды	2	3
7.2. Прямоугольники	2	2
7.3. Равенство фигур	2	3
7.4. Площадь прямоугольника	2	3
Обзор и контроль	2	2
Глава 8. Дроби	**18**	**21**
8.1. Доли	2	2
8.2. Что такое дробь	3	4

Продолжение

Глава и пункт учебника	Число уроков	
	1-й вариант	**2-й вариант**
8.3. Основное свойство дроби	3	4
8.4. Приведение дробей к общему знаменателю	2	2
8.5. Сравнение дробей	3	4
8.6. Натуральные числа и дроби	2	2
Обзор и контроль	3	3
Глава 9. Действия с дробями	**34**	**38**
9.1. Сложение и вычитание дробей	5	5
9.2. Смешанные дроби	3	3
9.3. Сложение и вычитание смешанных дробей	5	5
9.4. Умножение дробей	5	6
9.5. Деление дробей	5	6
9.6. Нахождение части целого и целого по его части	5	6
9.7. Задачи на совместную работу	3	4
Обзор и контроль	3	3
Глава 10. Многогранники	**10**	**14**
10.1. Геометрические тела и их изображение	2	3
10.2. Параллелепипед	2	3
10.3. Объём параллелепипеда	2	3
10.4. Пирамида	2	3
Обзор и контроль	2	2
Глава 11. Таблицы и диаграммы	**9**	**11**
11.1. Чтение и составление таблиц	3	3
11.2. Диаграммы	2	3
11.3. Опрос общественного мнения	2	3
Обзор	2	2
Повторение материала курса 5 класса	**10**	**12**

В поурочном планировании предусмотрены уроки для проведения контроля. Ссылки на материалы для текущего и тематического контроля приводятся в рекомендациях по каждой главе учебника.

Рекомендации по организации учебного процесса

Глава 1. Линии (8 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
1.1. Разнообразный мир линий	1	1—6 (ч. 1)		**Распознавать** на предметах, изображениях, в окружающем мире различные линии, плоские и пространственные. **Распознавать** на чертежах и рисунках замкнутые и незамкнутые линии, самопересекающиеся и без самопересечений. **Описывать** и **характеризовать** линии. **Конструировать алгоритм** построения линии, изображённой на клетчатой бумаге, **строить по алгоритму**. **Изображать** различные линии по образцу или с заданными свойствами
1.2. Прямая. Части прямой. Ломаная	2	9—22 (ч. 1)	П-1	**Распознавать** на чертежах, рисунках и моделях прямую, части прямой, ломаную. **Приводить** примеры аналогов частей прямой в окружающем мире, **моделировать** прямую, ломаную. **Узнавать свойства** прямой. **Изображать** прямую, луч, отрезок, ломаную от руки и с использованием линейки

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
1.3. Длина линии	2	23—33 (ч. 1)		**Измерять** длины отрезков с помощью линейки. **Сравнивать** длины отрезков с помощью циркуля, на глаз, выполнив измерения. **Строить** отрезки заданной длины с помощью линейки. **Узнавать зависимости** между единицами метрической системы мер, **выражать** одни единицы измерения длин через другие. **Находить ошибки** при переходе от одних единиц измерения длин к другим. **Находить** длины ломаных. **Находить** длину кривой линии
1.4. Окружность	2	34—44 (ч. 1)	П-2	**Распознавать** на чертежах, рисунках, моделях окружность и круг. **Приводить** примеры окружности и круга в окружающем мире. **Изображать** окружность заданного радиуса с помощью циркуля. **Конструировать алгоритм** воспроизведения рисунков из окружностей, **строить** по алгоритму, **осуществлять самоконтроль**, проверяя соответствие полученного изображения заданному рисунку. **Изображать** окружности по описанию. **Использовать терминологию**, связанную с окружностью. **Узнавать свойства** окружности
Обзор и контроль	1	**Описывать** и **характеризовать** линии. **Выдвигать** гипотезы о свойствах линий и **обосновывать** их. **Изображать** различные линии, в том числе прямые и окружности.		

Продолжение

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
Обзор и контроль	1	**Конструировать алгоритм** построения линии, изображённой на клетчатой бумаге, **строить** по алгоритму, **осуществлять** самоконтроль, проверяя соответствие полученного изображения заданному рисунку. **Находить** длины отрезков, ломаных		

Основные цели: развить представление о линии, продолжить формирование графических навыков и измерительных умений.

Обзор главы. В этой главе формируются некоторые общие представления о линии (замкнутость, самопересечение, внутренняя область и др.). Учащимся предлагаются задания на распознавание линий и их изображение. При этом задачи на изображение подразделяются на два вида: вычерчивание некоторой конфигурации по описанию и воспроизведению заданной конфигурации. Особое внимание уделяется прямой и окружности. Выполняя упражнения, учащиеся встречаются с конфигурациями, содержащими две и более прямых, две и более окружностей, прямые и окружности.

В начальной школе учащиеся уже знакомились с такой геометрической фигурой, как отрезок. Им известны единицы длины, они умеют измерять длину отрезка, строить отрезок заданной длины. В данной главе представления о фигурах, связанных с прямой, дополняются и расширяются: вводятся понятия «луч» и «ломаная». Теперь учащиеся находят длину ломаной, расстояние между двумя точками, кроме того, они встречаются с задачей определения длины кривой.

Материалы для контроля.

Учебное пособие «Тематические тесты»: Тест 1 «Линии».

1.1. Разнообразный мир линий

Методический комментарий

Материал пункта носит вводный характер. Здесь учащиеся впервые встречаются с некоторыми новыми типами заданий, которые в определённой степени должны стать для них привычными.

Одним из таких типов являются задания, цель которых — обучение учащихся осмысленному, грамотному и адекватному восприятию геометрических объектов. Рассматривая геометрическую конфигурацию, учащиеся должны видеть общую структуру изображения, уметь расчленять её на составные элементы, определять особенности их расположения и числовые характеристики. Чтобы облегчить восприятие, учащиеся могут воспользоваться некоторыми простыми приёмами — «пройтись» по линии пальцем, карандашом, выделить её цветом.

Задания на воспроизведение конфигураций требуют выработки общего алгоритма действий: сначала внимательно рассмотреть изображение, а затем сформулировать последовательность выполнения построения, обращая при этом внимание и на дополнительные построения.

Учащиеся должны осознать те преимущества, которые даёт клетчатая бумага для вычерчивания различных линий. Желательно сразу приучить их «шагать» по узлам сетки. Так, чтобы воспроизвести предложенный отрезок с концами в узлах сетки, они должны отсчитать от одного из его концов, например, пять клеток вправо и две клетки вверх. Однако в работе должна использоваться и нелинованная бумага, а изображения следует выполнять как с помощью инструментов, так и от руки.

На окружающих предметах, рисунках учащиеся должны увидеть не только плоские, но и пространственные линии. Это может быть ломаная на каркасе куба, кривая на шаре, спираль пружины и т. д.

Заметим, что не следует останавливаться на этом пункте дольше, чем рекомендовано планированием. Решение таких задач, носящих ярко выраженный развивающий характер, лучше распределить во времени. Поэтому определённую часть заданий из учебника и рабочей тетради целесообразно включить в следующие уроки, например в уроки по теме «Натуральные числа».

Комментарий к упражнениям

5. Из анализа рисунка выясняется, что спираль состоит из отрезков: первый и второй отрезки равны одной клетке, третий и четвёртый — двум клеткам и т. д., а движение по спирали происходит против часовой стрелки.

9. Копировать овал нужно, пользуясь сеткой тетрадного листа. Сетка разбила овал на фрагменты, поэтому просто рисовать один фрагмент за другим. Полезно обратить внимание учащихся на то, что у этой линии есть центр. Отсчитав от него две клетки вверх и две клетки вниз, получим верхнюю и нижнюю точки овала, а отсчитав шесть клеток влево и шесть клеток вправо, — левую и правую точки.

11. Это упражнение служит развитию умения, опираясь на чертёж или рисунок, выполнить некоторое действие мысленно. При этом проведение эксперимента является существенной частью упражнения — учащиеся мысленно повторяют действия, выполненные практически.

Решение задачи из рабочей тетради о трёх домиках изображено на рисунке 1.

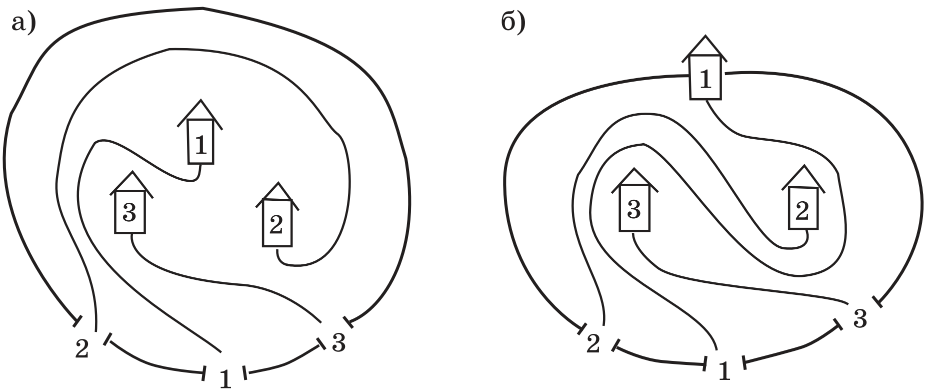


Рис. 1

1.2. Прямая. Части прямой. Ломаная

Методический комментарий

Теоретическая часть пункта содержит достаточно много новых понятий и терминов, которые должны войти в активную речь учащихся. Целесообразно разбить её изучение на несколько этапов. Сначала нужно поговорить о прямой, её бесконечности, способах обозначения, выполнить с учащимися упражнения на построение, стремясь при этом к тому, чтобы они осознавали и некоторые факты — провести через отмеченную точку несколько прямых и понять, что таких прямых бесконечно много; провести прямую через две отмеченные точки и осознать, что такая прямая только одна; провести три попарно пересекающиеся прямые и понять, что точек пересечения тоже три. Затем можно перейти к фигурам, являющимся частью прямой: ввести понятия луча и отрезка и решить несколько связанных с ними задач, сравнить их свойства, способы обозначения. И только потом ознакомить учащихся с ломаной и выполнить задания на отработку этого понятия.

Обращаем ваше внимание на то, что поначалу учащихся при обозначении прямой двумя буквами обязательно должны отмечать на прямой и соответствующие им точки. Со временем точки можно будет не ставить, пояснив, что здесь подразумеваются любые две точки.

В задачах этого пункта отрабатывается понимание таких оборотов речи, как «точка лежит (не лежит) на прямой (луче, отрезке)», «точка лежит между точками», «точка принадлежит (не принадлежит) прямой (лучу, отрезку)», «прямая пересекает (не пересекает) прямую (луч, отрезок)».

Комментарий к упражнениям

22. Полезно использовать каркасную модель куба для демонстрации на ней называемых отрезков.

23. *Дополнительный вопрос*: сколько отрезков, равных отрезку AB, одним из концов которых является точка A, а другой конец лежит в узле сетки, вы можете построить? Всего их 8.

25. 2) Задача достаточно трудная, поэтому в зависимости от возможностей класса можно ограничиться ответом на один первый вопрос или на два первых вопроса. Решение начинается с выполнения рисунка. Учитель должен предусмотреть, что рисунок потребует много места. Лучше всего каждому ученику дать лист нелинованной бумаги. Первый шаг: начертить три попарно пересекающиеся прямые и отметить точки их пересечения — светофоры (рис. 2, *а*). Необходимо обратить внимание учащихся на то, что точек пересечения прямых три, и сделать на доске соответствующую запись (рис. 2, *в*, верхняя строка). Второй шаг: провести четвёртую прямую, пересекающую три предыдущих (рис. 2, *б*). Учащиеся должны заметить, что число точек пересечения при этом увеличится на число пересекаемых улиц. Значит, число светофоров с четырьмя улицами равно трём «старым» светофорам и трём «новым» (вторая строка на рис. 2, *в*). Следующий шаг: провести пятую прямую, отметить новые точки пересечения, подсчитать их число и сделать соответствующую запись на доске. В несильном классе можно остановиться и на этом шаге. Если учащимся удалось подметить закономерность, то они могут продолжить вычисления для 6, 7, ..., 10 улиц, уже не обращаясь к рисунку. Число светофоров с десятью улицами равно 45. (Для учителя укажем рекуррентное соотношение $An = An_{-1} + (n - 1)$.)

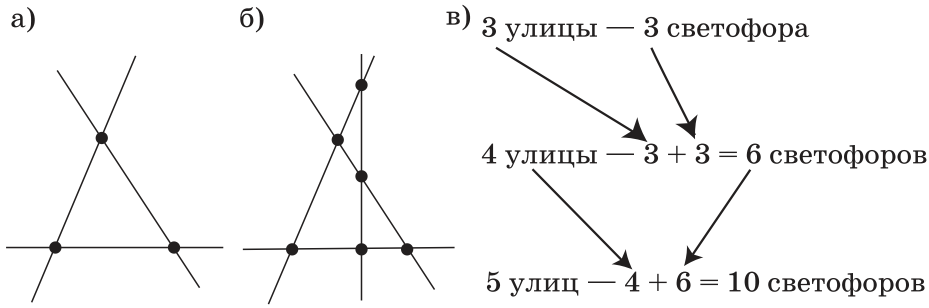


Рис. 2

26. 1) Куб можно спаять из 12, 6 и 4 одинаковых кусков проволоки.

2) Нет, цветные проволочки двух кубов спаяны различным образом.

В рабочей тетради есть задача о построении всех отрезков с концами в заданных четырёх точках. Полезно обратить внимание учащихся, что и в первом (никакие три точки не лежат на одной прямой) и во втором случае (три из четырёх точек лежат на одной прямой) получили 6 отрезков. Чтобы подсчитать все отрезки, нужно провести, например, красным карандашом все отрезки с концом в точке K, синим — с концом в точке M, зелёным — с концом в точке L, жёлтым — с концом в точке N. Из каждой точки проведено по три отрезка, всего отрезков $3 \cdot 4 = 12$, но каждый отрезок проведён дважды, следовательно, отрезков $12 : 2 = 6$.

Задачу можно решить и для большего числа точек.

Решение задач о точках и ломаной из рабочей тетради см. на рисунке 3.

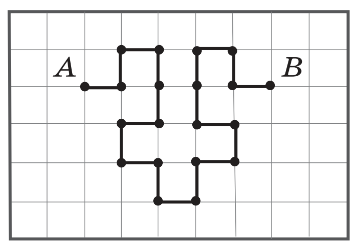


Рис. 3

1.3. Длина линии

Методический комментарий

В этом пункте можно выделить две составляющие: теоретическую и практическую. Теоретическая связана с развитием представлений учащихся об изменении величин. Здесь повторяются и расширяются сведения об единицах длины и впервые ставится задача измерения длины кривой. Практический аспект связан с непосредственным выполнением реальных измерений и построений, решением задач вычислительного характера и др. Следует обратить внимание на владение учащимися единицами длин, умение перейти от одних единиц к другим (такие задания есть в рабочей тетради). В связи с этим можно несколько расширить их представления о соотношениях между единицами. В учебнике указано, что основная метрическая единица измерения длин — метр. Соотношения между метром и другими, связанными с ним единицами отражены в их названиях. Приставки в терминах «километр», «дециметр», «сантиметр», «миллиметр» означают увеличение или уменьшение основной единицы в 10, 100 или 1000 раз. Так, приставка «кило» означает увеличение в 1000 раз: 1 км = 1000 м. Приставка «деци» означает уменьшение в 10 раз (1 м = 10 дм), «санти» — в 100 раз (1 м = 100 см), «милли» — в 1000 раз (1 м = 1000 мм). Полезно здесь и далее при изучении натуральных чисел предлагать упражнения типа: «Сколько сантиметров содержится в 3 м, 35 м, 5 дм, 28 дм?», «Сколько миллиметров содержится в 7 см, 15 см, 6 дм, 19 дм, 4 м?», «Выразите в метрах 3 км 200 м; в сантиметрах 7 дм 4 см», «Выразите в километрах 4000 м, 16 000 м».

Следует проверить, каждый ли учащийся умеет пользоваться линейкой для измерения длин отрезков. С этой целью можно использовать задания из рабочей тетради. Полезно также организовать практическую работу: дать каждому ученику заранее заготовленный лист нелинованной бумаги с изображёнными на нём отрезками и предложить провести измерения. Для проверки правильности выполнения измерений учащиеся меняются листами. После этого каждый ученик может предложить соседу построить отрезок заданной длины.

Обращаем внимание на то, что при изучении этого пункта формируется умение оценивать длину отрезка на глаз, а также практически важное представление о том, какие единицы измерения длин используются в тех или иных реальных ситуациях.

Кроме того, учащиеся должны понимать, что для откладывания отрезка данной длины можно использовать не только линейку, но и циркуль. Этому способствуют и упражнения из рабочей тетради.

Заметим, наконец, что через систему упражнений в этом пункте формируется важное для дальнейшего обучения представление о длине ломаной.

Комментарий к упражнениям

38. Построение можно, например, выполнить так. Сначала построить отрезок длиной 4 см: 10 – 3 – 3 = 4 (см). Затем построить отрезок длиной 5 см: 4 + 4 – 3 = 5 (см). И наконец, построить отрезок длиной 2 см: 5 – 3 = 2 (см). Будет интересно, если учащиеся предложат разные решения.

При выполнении задания следует строить реальные отрезки. При этом оговаривается, что на линейке можно использовать только метки «0», «3» и «10».

1.4. Окружность

Методический комментарий

При изучении этого пункта учащиеся должны, во-первых, усвоить термины, связанные с окружностью (центр окружности, диаметр, радиус), во-вторых, научиться пользоваться циркулем для вычерчивания окружности, в-третьих, осознать характеристическое свойство окружности — равноудалённость её точек от центра.

Учащиеся должны научиться выполнять различные задания на построение окружности: строить окружность заданного радиуса; радиусом, равным данному отрезку; с центром в заданной точке; проходящую через другую заданную точку и т. д.

Построив окружность и проведя пересекающую её прямую, учащиеся должны увидеть две точки пересечения и соединяющий их отрезок. А проведя прямую через центр окружности, они должны увидеть диаметр и осознать, что диаметр является отрезком наибольшей длины среди всех отрезков, соединяющих две точки окружности.

Следует, где это возможно, подчёркивать, что диаметр «составляется» из двух радиусов, и поэтому его длина равна двум радиусам. Здесь полезно построить окружность, диаметром которой является заданный отрезок (середину отрезка учащиеся находят измерением), а затем окружность с диаметром заданной длины.

Продолжается работа по воспроизведению заданных конфигураций. Полезно обратить внимание учащихся на то, что если узор составлен из окружностей, то для каждой окружности нужно найти её центр и определить, чему равен её радиус.

Комментарий к упражнениям

48. Сначала упражнение выполняется на глаз. Затем учащиеся измеряют диаметр круга и сравнивают его с длиной каждого отрезка.

Глава 2. Натуральные числа (13 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
2.1. Как записывают и читают натуральные числа	2	45—57 (ч. 1)	О-1, О-2, П-3	**Читать** и **записывать** многозначные числа. **Применять** при записи больших чисел сокращения: тыс., млн, млрд. **Представлять** числа в виде суммы разрядных слагаемых. **Читать** и **записывать** числа в непозиционной системе счисления (клинопись, римская нумерация). **Исследовать** числовые закономерности. **Работать** с источниками информации
2.2. Натуральный ряд. Сравнение натуральных чисел	2	58—67 (ч. 1)	О-3, О-4, П-4	**Описывать** свойства натурального ряда. **Сравнивать** и **упорядочивать** натуральные числа и величины (длину, массу, время). **Переходить** от одних единиц измерения величин к другим. **Исследовать** числовые закономерности. **Записывать** и **читать** неравенства, цепочки неравенств
2.3. Числа и точки на прямой	2	58—78 (ч. 1)	П-5	**Чертить** координатную прямую, **изображать** числа точками на координатной прямой, **определять** координату отмеченной точки. **Сравнивать** и **упорядочивать** числа с опорой на координатную прямую

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
2.4. Округление натуральных чисел	2	79—83 (ч. 1)	О-5	**Определять** из данной информации, содержащей число с нулями на конце, какое значение оно выражает: точное или приближённое. **Округлять** натуральные числа по смыслу. **Применять** правило округления натуральных чисел. **Участвовать** в обсуждении возможных ошибок в ходе и результате выполнения заданий на округление чисел
2.5. Решение комбинаторных задач	3	84—91 (ч. 1)		**Решать** комбинаторные задачи с помощью перебора всех возможных вариантов (комбинаций чисел, слов, предметов и др.). **Моделировать** ход решения с помощью рисунка, с помощью дерева возможных вариантов
Обзор и контроль	2	**Использовать** позиционный характер записи чисел в десятичной системе в ходе решения задач. **Читать** и **записывать** натуральные числа, **сравнивать** и **упорядочивать** числа. **Изображать** числа точками на координатной прямой. **Округлять** натуральные числа. **Решать** комбинаторные задачи с помощью перебора всех возможных вариантов		

Основные цели: развить знания учащихся о десятичной системе счисления, умения читать, записывать и сравнивать натуральные числа; сформировать навыки округления натуральных чисел; познакомить с методом решения комбинаторных задач путём перебора возможных вариантов.

Обзор главы. Изложение материала начинается с сопоставления римской нумерации и десятичной системы счисления. Это позволяет более выпукло представить особенности записи чисел в десятичной системе, подчеркнуть преимущества позиционной нумерации, а также создать для данной темы своего рода историко-культурологический фон.

Из курса начальной школы учащимся известны алгоритмы чтения и записи натуральных чисел. Задача данного этапа состоит в совершенствовании этих навыков, в обучении работе с большими числами, содержащими классы миллионов и миллиардов. Учащиеся знакомятся со свойствами натурального ряда, узнают о возможности изображения чисел точками на прямой, при этом координатная прямая призвана играть роль наглядной опоры при решении задач на сравнение и упорядочивание чисел.

В этой главе положено начало изучению двух новых для учащихся разделов курса математики. Прежде всего это раздел «Приближения и оценки». Рассматривается вопрос об округлении натуральных чисел, вводятся такие термины, как «приближение с недостатком» и «приближение с избытком», оборот речи «приближение с точностью до...». Кроме того, здесь начинается изучение комбинаторики. Учащиеся знакомятся с естественным и доступным детям этого возраста методом решения комбинаторных задач путём перебора всех возможных вариантов (комбинаций). Этим методом удобно пользоваться в тех случаях, когда число вариантов невелико. В качестве специального приёма перебора рассматривается дерево возможных вариантов.

Система упражнений учебника, помимо достижения основных целей, обозначенных выше, позволяет также вспомнить единицы измерения величин (длины, массы, времени), соотношения между ними. Другая особенность ряда упражнений — это использование буквенной символики для обозначения чисел, которое усилится по мере продвижения по курсу. И наконец, ещё одной чрезвычайно важной особенностью системы упражнений является систематическое и последовательное включение заданий, при выполнении которых учащиеся должны рассуждать, обосновывать, пояснять свои действия. Иными словами, в содержании данной главы заложен большой потенциал для развития мышления и речи учащихся.

Материалы для контроля.

Учебное пособие «Контрольные работы»: Контрольная работа № 1 «Натуральные числа. Линии».

Учебное пособие «Тематические тесты»: Тест 2 «Натуральные числа».

2.1. Как записывают и читают натуральные числа

Методический комментарий

Содержание пункта носит, прежде всего, идейный характер: оно направлено на осознание учащимися особенностей десятичной нумерации. Однако важнейшей задачей при его изучении является также формирование прочных навыков чтения и записи натуральных чисел, в том числе с использованием сокращений тыс., млн, млрд. Этой цели служат такие упражнения, как **62—65**. Известно, что ошибки в записи натуральных чисел, а потом и десятичных дробей являются достаточно распространёнными. Поэтому рекомендуем упражнения, подобные указанным, предлагать учащимся в последующем в качестве устных вопросов. Приведём ещё примеры заданий такого рода:

- Прочитайте числа:

24301; 2485321; 2400021; 248021; 2405301; 2480301.

- Запишите цифрами число:

а) триста девятнадцать тысяч двести двадцать пять;
б) сорок тысяч сто двенадцать;
в) шесть тысяч двадцать семь;
г) пятьсот тысяч десять.

Работу по формированию навыков чтения и записи натуральных чисел следует сопровождать советами, как действовать, чтобы не допускать ошибок, обучением приёмам самоконтроля. Например: при чтении многозначного числа всегда следует сначала разбить его на классы (мысленно или с помощью штрихов) и осознать, с какого класса начинается запись; при записи числа важно помнить, что каждый класс, кроме, может быть, самого левого, должен содержать 3 цифры, и не забывать записывать нули в «пустые» разряды; записанное число нужно прочитать (про себя или вслух) — это поможет увидеть возможную ошибку в записи.

В то же время при организации работы учащихся по чтению и записи чисел в римской нумерации рекомендуем иметь в виду, что соответствующие знания носят общекультурный характер; формирование навыков здесь не предполагается. Эта установка должна отразиться на характере работы с упражнениями. Учащиеся могут иметь перед глазами таблицу перевода римских цифр в десятичную систему (как в упражнении **61**), обращаться при необходимости к правилам записи чисел в римской системе. Такая работа очень полезна;

она апеллирует не столько к памяти, сколько к умению действовать по предложенному алгоритму.

Комментарий к упражнениям

62. Натуральное число — это краткая запись суммы разрядных слагаемых в виде последовательности цифр. Слагаемых должно быть столько же, сколько цифр в записи числа, т. е. не следует пропускать слагаемые с коэффициентом 0.

64. Неверную запись надо заменить на правильную.

68—69. Прежде чем приступать к выполнению этих упражнений, следует убедиться, что все учащиеся понимают смысл слов «однозначное число», «двузначное число» и т. д. А задание **68,** *а* надо начать с того, что предложить всем ученикам записать несколько четырёхзначных чисел.

70. В каждой следующей фигуре на две клетки больше, чем в предыдущей. Последовательностью фигур на самом деле «зашифрована» последовательность чисел 5, 7, 9, 11. В задании предлагается перейти от рисования фигур к записи чисел. Так как чисел немного, то все их можно попросту выписать.

71. Цель задания — познакомить учащихся со знаменитой легендой и организовать доступную их возрасту содержательную работу с числовой последовательностью, к которой они в дальнейшем будут возвращаться неоднократно. Задание выполняется путём рассмотрения и анализа последовательности чисел, записанных на «клетках» доски, выполнения арифметических операций, необходимых для получения ответа.

1) Ответ на последний вопрос можно получить простой прикидкой, не выполняя точного подсчёта. В самом деле, на 24-й клетке записано число, большее 8 млн. Значит, на 25-й клетке будет число, большее 16 млн, а на 26-й — число, большее 32 млн. Следовательно, оно заведомо превысит 20 млн. Учащиеся могут «почувствовать», как резко увеличивается скорость роста чисел.

2) На 11-й клетке на 1 зерно больше, чем на первых десяти клетках вместе.

Дополнительный вопрос: сколько всего зёрен на первых двадцати клетках? (Ответить без суммирования.)

3) В 256 раз.

2.2. Натуральный ряд. Сравнение натуральных чисел

Методический комментарий

Здесь продолжается изучение натуральных чисел. По сравнению с начальной школой этот этап можно охарактеризовать словом «осознание».

Термин «натуральный ряд», а также связанные с ним термины (предыдущее число, последующее число) должны войти в активный словарный запас учащихся. Обращаем внимание на распространённую ошибку — употребление вместо слов «натуральный ряд» оборота речи «натуральный ряд чисел». «Натуральный ряд» — это имя собственное, название последовательности чисел 1, 2, 3, ...

Важно, чтобы учащиеся осознали и запомнили, что в натуральном ряду есть наименьшее число, но нет наибольшего, что он бесконечен; понимали, что всегда можно указать число, следующее за данным, прибавив 1; умели указать «соседей» числа в натуральном ряду, в том числе в случаях перехода через разрядную единицу (см. упражнение **76**); могли записать фрагмент натурального ряда с использованием многоточия. Эти знания и умения носят опорный характер, они неоднократно будут служить содержательной основой при изучении теории и выполнении упражнений.

Что касается понятий чётного и нечётного числа, то работа с ними в этом месте курса основана на определении (это числа, которые соответственно делятся и не делятся на 2). Признак, сводящийся к установлению чётности по последней цифре, будет рассмотрен позже в теме «Делимость». А здесь важно, чтобы учащиеся хорошо освоились с самими терминами, могли установить принадлежность числа к тому или иному виду с помощью определения, поняли, что если число чётное, то его соседи в натуральном ряду — числа нечётные (и наоборот). В этой связи обращаем внимание на упражнение **79**, в котором сделан простейший шаг для выражения указанных выше фактов с помощью буквенной символики.

Вторая часть пункта посвящена вопросу о сравнении натуральных чисел, а основная цель тоже состоит в развитии и осознании знаний и умений, заложенных в начальной школе. При выполнении заданий на сравнение чисел (см. упражнения **82—84**) учащиеся должны опираться на приобретённый ранее опыт, при этом необходимо, чтобы постоянно звучал соответствующий комментарий. Это может быть любое разумное пояснение. Например, при сравнении чисел 5270 и 987 ученики могут рассуждать так: число 5270 больше, так как в натуральном ряду (или при счёте) оно появляется позже; в числе 5270 есть разряд тысяч, а число 987 начинается с разряда сотен; в числе 5270 больше цифр; число 5270 четырёхзначное, а число 987 трёхзначное. Следует обратить внимание на выработку навыка записывать результат сравнения и упорядочивания чисел с помощью знаков неравенства.

Комментарий к упражнениям

80. Можно сформулировать вывод с использованием буквы: чтобы найти чётное число, которое стоит на месте с номером n, надо номер n умножить на 2. Можно также записать: $n \cdot 2$.

81. Удобно сопоставить эту последовательность с последовательностью чётных чисел, выписав их друг под другом:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \ldots \end{array}$$

Вывод: каждое число в последовательности нечётных чисел на 1 меньше соответствующего числа последовательности чётных чисел. Чтобы узнать, какое нечётное число стоит на 20-м месте, умножим 20 на 2 и отнимем 1; получим $20 \cdot 2 - 1 = 39$. Можно воспользоваться результатами упражнения **80**. В общем виде правило записывается так: $n \cdot 2 - 1$ (но это только для сильных учащихся).

85. Вывод учащиеся должны запомнить.

86. Следует обсудить возможность двух способов решения: переход от записи с сокращёнными наименованиями к записи в десятичной системе, т. е. к числу с нулями на конце, и наоборот. Важно, чтобы учащиеся осознали и запомнили, что сокращение *тыс.* равнозначно приписыванию трёх нулей, сокращение *млн* — шести нулей, сокращение *млрд* — девяти нулей.

87. Ошибок будет меньше, если сначала учащиеся запишут числа в нужном порядке, а потом вставят между ними соответствующий знак сравнения. Конечно, в дальнейшем эти два момента в записи следует совмещать.

89. В пунктах 2 и 4 приведены типичные ошибки. Неверные записи следует заменить правильными.

91. Нужно прежде всего проверить, что учащиеся помнят соотношения между единицами измерения величин (длины, массы, времени). Для этого можно использовать вопросы типа:

• Какое из равенств верно:
а) 1 км = 100 м или 1 км = 1000 м;
б) 1 кг = 1000 г или 1 кг = 100 г;
в) 1 ч = 100 мин или 1 ч = 60 мин?

• Выразите:
а) в сантиметрах: 1 м, 3 м, 30 м;
б) в килограммах: 1 т, 3 т, 10 т;
в) в секундах: 1 мин, 5 мин, 10 мин.

Далее следует пояснить, что приём сравнения величин состоит в переходе к одним и тем же единицам.

1а) Можно 10 м выразить в сантиметрах. Так как 10 м = 1000 см, то 980 см < 10 м.

Можно поступить иначе: выразить 980 см в метрах и сантиметрах. Так как 900 см = 9 м, то 980 см = 9 м 80 см. Понятно, что 9 м 80 см < 10 м.

Заметим, что для учащихся легче перейти к более мелким единицам. Но показать полезно и тот, и другой способ.

94. Задание трудное, вряд ли многие учащиеся выполнят его самостоятельно полностью, ответив на вопрос «Сколько?». Поэтому рекомендуем использовать это задание для обучения поиску хода рассуждений. Это можно сделать, например, так:

• Об искомых числах мы знаем, что они пятизначные, на конце цифра 7, они меньше числа 10101. Сделаем заготовку для цифр с учётом первых двух условий: $\_\ \_\ \_\ \_\ \underline{7}$.

• Так как в числе 10101 первая слева цифра — это 1, то и в искомых числах там должна стоять 1 (в любом другом случае получим число, большее 10101). Впишем её в заготовку: $\underline{1}\ \_\ \_\ \_\ \underline{7}$. Точно такими же рассуждениями получаем, что дальше должна быть цифра 0; приходим к записи:

$$\underline{10}\ \_\_\ \_\_\ \underline{7}.$$

• Если третьей слева, как и в числе 10101, поставить 1, то любое число, соответствующее нашей заготовке, будет больше числа 10101 (например, 10107). Поэтому третьей слева обязательно должна быть цифра 0; получим $\underline{100}\ \_\_\ \underline{7}$.

• Осталось определить цифру десятков. Понятно, что, какую цифру ни поставить, всегда получится число, меньшее 10101.

Ответ. Всего таких чисел десять: 10007, 10017, 10027, ..., 10097.

96. 1) Первый случай не подходит, так как высота больше 190 см.

Второй случай по высоте проходит. Проверим, выполняется ли второе требование, т. е. проверим, верно ли двойное неравенство

$$590 < 250 + 2 \cdot 180 < 640.$$

Так как $250 + 2 \cdot 180 = 610$, то и второе требование выполняется.

В третьем случае имеем $280 + 2 \cdot 185 = 650$, т. е. второе требование не выполняется.

3) 180 мм = 18 см. Так как $270 : 18 = 15$, то получится 15 ступенек.

Чтобы ступеньки удовлетворяли второму требованию, должно выполняться условие:

$$590 < Г + 2 \cdot 180 < 640.$$

Границы глубины определяются подбором (понятно, что никакое формальное решение неравенства не предполагается).

Ответ: 230 мм < Г < 280 мм.

2.3. Числа и точки на прямой

Методический комментарий

В содержании этого пункта можно выделить два вопроса: это, во-первых, координатная прямая, изображение чисел точками на прямой, а во-вторых, геометрическая трактовка отношений «больше» и «меньше» между числами и сравнение чисел с опорой на координатную прямую.

На начальном этапе изучения материала должны преимущественно выполняться упражнения на готовом чертеже. После этого можно перейти к заданиям, в ходе которых учащиеся самостоятельно чертят координатную прямую. Они должны научиться быстро и аккуратно чертить координатную прямую (по линейке или от руки), так как с этого момента координатная прямая становится опорой при рассмотрении самого разнообразного материала. Обращаем внимание на то, что нередко учащиеся отмечают точки 0, 1, 2, 3, ... на неодинаковом расстоянии друг от друга. Предупреждением такого рода ошибок может послужить рассмотрение в качестве прообраза координатной прямой шкалы чертёжной линейки. Пусть учащиеся увидят в ней не только инструмент для измерения и откладывания отрезков определённой длины, но и «кусок» готовой координатной прямой и перенесут её изображение на нелинованную бумагу, сначала приняв за единичный отрезок 1 см, а затем более крупный (или мелкий) отрезок.

Кроме того, желательно сформировать умение выбирать подходящий для данной ситуации единичный отрезок, разобраться в ситуации, когда поиск координаты точки осуществляется с учётом расположения других точек (в этом помогут задания из рабочей тетради). Заметим также, что в дальнейшем учащимся придётся научиться представлять координатную прямую мысленно.

Комментарий к упражнениям

107. В случае затруднений учащиеся могут рассуждать, опираясь на схематический рисунок.

109. Можно использовать модель координатной прямой или заранее заготовленный чертёж.

111. Это задание — развитие идеи упражнения **109**. Учащиеся должны понять, что количество пар определяется количеством точек с натуральными абсциссами, расположенных левее точки $M(50)$.

113. Оба числа четырёхзначные, чётные, начинаются с цифры 2, в разряде десятков имеют цифру 1.

2.4. Округление натуральных чисел

Методический комментарий

Данный вопрос, как и любой другой, связанный с приближёнными вычислениями, относится к темам, которые наиболее трудны для восприятия учащимися. Основной целью данного этапа является создание первоначальных представлений, необходимых для формирования оценочных умений, выполнения заданий на прикидку и оценку результата.

Термин «округление» отождествляется с заменой первоначального числа круглым, т. е. числом с нулями на конце. Округление вначале осуществляется на содержательном уровне, по смыслу: из двух круглых чисел, между которыми заключено данное число, выбирается то, к которому оно ближе. Например, $560 < 564 < 570$, и число 564 ближе к 560, чем к 570. Поэтому $564 \approx 560$ (здесь мы округлили число 564 до десятков).

После того как будет выполнено несколько заданий на округление чисел по смыслу, следует предложить учащимся правило округления, которое позволяет действовать формально, без реального или мысленного обращения к координатной прямой, без предварительной оценки заданной величины снизу и сверху круглыми числами.

Учащимся легче будет запомнить и применять правило округления натуральных чисел, если их убедить в его естественности и разумности. Это можно сделать, обратившись сначала к рассмотренным выше примерам округления до десятков чисел 564, 565, 568 (см. с. 38 учебника):

$$5\underline{6}4 \approx 5\underline{6}0,\ 5\underline{6}5 \approx 5\underline{7}0,\ 5\underline{6}8 \approx 5\underline{7}0.$$

Беседа может быть такой. Посмотрите: при округлении до десятков цифра в разряде десятков либо не менялась, либо увеличилась на 1. В каком случае она не менялась? А какие ещё числа вместо 564 можно было бы взять, чтобы эта цифра также осталась неизменной? А в каких случаях в разряде десятков вместо цифры 6 оказалась цифра 7? А если бы мы округляли до десятков число 566, какой стала бы цифра в разряде десятков? После этого можно обратиться к первому пункту правила округления.

Познакомив учащихся с правилом округления, можно предложить в дальнейшем действовать так, как им удобнее. При этом всё же следует подчеркнуть, что с помощью правила числа округлять легче.

В заключение заметим, что на этом этапе не стоит значительно увеличивать число упражнений на округление чисел, включать трудные случаи. К этому вопросу можно будет вернуться при изучении десятичных дробей в 6 классе.

Комментарий к упражнениям

121. Аналогичные задания:

1) Масса искусственного спутника Земли 1327 кг. Сколько это примерно тонн?

2) Длина реки Лены 4400 км. Если выразить эту величину в тыс. км, то получим 4 тыс. км. Выразите в тыс. км длину реки Енисея — 3487 км, реки Оби — 3650 км.

124. *Дополнительный вопрос*: какие ещё употребляют слова при изложении подобного рода информации? Приведите свои примеры.

130. В школе от 600 до 800 учащихся. Если в школе 758 учеников, то число 800; если 626, то число 600.

131. Нужно рассмотреть два случая: 1) при округлении цифра в разряде десятков не менялась; 2) цифра в разряде десятков в результате округления увеличивалась на 1.

2.5. Решение комбинаторных задач

Методический комментарий

Прежде всего подчеркнём, что на этом этапе курса не предполагается ни введение известных названий комбинаторных комбинаций, ни рассмотрение соответствующих формул. Слово «перестановки», появляющееся в ходе решения задачи 3, следует расценивать не как специальный математический термин, а как подходящее в данном контексте слово русского языка. Здесь используется естественный, доступным детям этого возраста метод решения комбинаторных задач с помощью непосредственного перебора возможных вариантов (комбинаций). Этот метод целесообразен в тех случаях, когда число вариантов невелико.

На первоначальном этапе освоения решить комбинаторную задачу — это значит выписать все возможные комбинации, составленные из чисел, слов, предметов и т. д., отвечающих условию задачи. Цель пункта состоит в том, чтобы в процессе решения задач учащиеся встретились с необходимостью перебора различных по своей сути и составу комбинаций.

При этом полезно неоднократно напоминать: перебор вариантов следует организовать так, чтобы не пропустить ни один из них и в то же время избежать повтора.

Среди других способов перебора в теоретической части пункта рассматривается перебор с помощью специальной схемы — дерева возможных вариантов. Желательно, чтобы построение дерева выполнялось без использования линейки, от руки.

Решение комбинаторных задач считается правильным и полным, если учащийся предъявил все возможные варианты, каким бы способом решения он при этом ни воспользовался.

Упражнения группы **А** по сути являются аналогами задач, рассмотренных в тексте, в них применяются те же схемы рассуждений. Так, упражнения **137** и **138** — это вариации на тему задачи 1; упражнения **139—142** решаются с помощью такого же приёма, что и задача 2; упражнения **143** и **144** — это задания на перестановки, как и задача 3 из текста учебника; наконец, упражнения **145—147** выполняются с помощью построения дерева возможных вариантов (см. конец теоретической части пункта). Что касается упражнений группы **Б**, то все они разные, в них представлены некоторые новые идеи.

Комментарий к упражнениям

137. Всего получается 16 чисел:

33, 35, 37, 39,
53, 55, 57, 59,
73, 75, 77, 79,
93, 95, 97, 99.

Если использовать каждую цифру только один раз, то из приведённого списка надо вычеркнуть числа 33, 55, 77, 99. Останется 12 чисел.

138. Прежде всего, заметим, что число не может начинаться с цифры 0. Далее возможны два варианта решения задачи.

Можно выписать числа 10, 12, 20, 21, сразу отбросив не устраивающие нас числа 11 и 22.

А можно записать все возможные двузначные числа, состоящие из данных цифр в порядке возрастания: 10, 11, 12, 20, 21, 22, и потом вычеркнуть числа 11 и 22, состоящие из одинаковых цифр. После чего получим 4 числа: 10, 12, 20, 21.

Соответственно, если каждую цифру можно использовать не один раз, то получится 6 чисел.

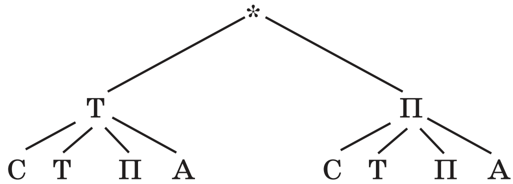
139. Обозначим полицейских первыми буквами их фамилий: Б, С, У, Д. Далее рассуждаем по той же схеме, что и в задаче об отрезках на прямой (см. задачу 2). Сначала выпишем все пары, в которые входит буква Б; получим БС, БУ, БД. Теперь запишем пары, в которые входит буква С. Пару СБ отбрасываем, так как в неё входят те же два полицейских, что и в пару БС. Получаем СУ, СД. Рассуждая так же, находим ещё пару УД. Всего получаем 6 способов составления пар полицейских.

140. Ввести обозначения: Ш, Л, К, Э. Далее рассуждать так же, как в задаче 2. Всего 6 способов.

141. Каждой из книг присвоим номер от 1 до 5; получим 1, 2, 3, 4, 5. Далее рассуждаем, как в задачах выше.

143. Можно рассуждать так: два возможных шифра начинаются с цифры 1, два шифра — с цифры 2 и два шифра — с цифры 3. Итого 6 шифров: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

145. Обозначим возможные виды транспорта соответствующими буквами (например, теплоход — буквой Т). Дерево возможных вариантов имеет следующий вид:

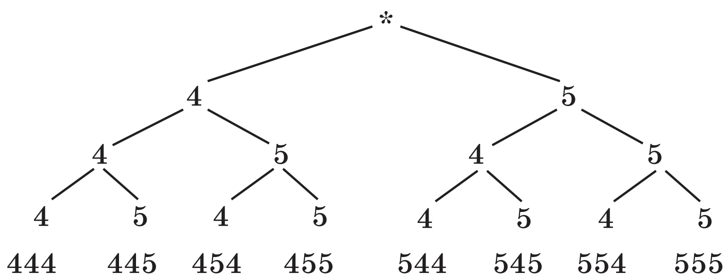


Всего 8 способов.

148. 1-й *способ*. Можно записать числа в порядке возрастания:

444, 445, 454, 455,
544, 545, 554, 555.

Получим 8 чисел.
2-й *способ*. Можно нарисовать дерево возможных вариантов:



Всего получается 8 чисел.

149. Запишем все такие числа в порядке возрастания: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII. Для следующих чисел уже нужны другие цифры. Всего получим 8 чисел.

150. Понятно, что эти числа должны начинаться с цифры 4. Цифру 4 на первом месте «фиксируем», а цифры в остальных трёх разрядах получаются всеми возможными перестановками цифр 1, 2 и 3 (см. упражнение **143**). Получаем 6 чисел: 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

151. Рассуждаем по той же схеме, что и в задаче 2. Сначала вычёркиваем все возможные пары цифр, в которые входит цифра 4. Вычеркнули 4 и 8, получили 5203; вычеркнули 4 и 5, получили 8203; вычеркнули 4 и 2, получили 8503; вычеркнули 4 и 0, получили 8523; вычеркнули 4 и 3, получили 8520.

Далее вычёркиваем все возможные пары, в которые входит цифра 8. Пара из цифр 8 и 4 уже рассматривалась. Вычёркиваем пары 8 и 5, 8 и 2, 8 и 0, 8 и 3; получаем ещё четыре числа: 4203, 4503, 4523, 4520. Рассуждая так же, получаем числа: 4803, 4823, 4820; 4853, 4850; 4852. Всего 15 чисел.

Самое большое число — это 8523.

152. Искомые двузначные числа могут начинаться с любой цифры, кроме 0. С цифры 1 начинается одно такое число — это 10; с цифры 2 начинаются два таких числа — это 20 и 21; с цифры 3 начинаются три таких числа — это 30, 31, 32, и т. д.

Всего имеем 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 чисел.

153. Комбинации можно описать с помощью наборов из пяти цифр, причём на первом месте всегда стоит 1, а на последнем — цифра 5. Фактически нужно определить число всех возможных троек, которые можно составить из цифр 2, 3 и 4. Всего имеется 6 вариантов передачи шайбы (включая изображённую на рисунке): 12345, 12435, 13245, 13425, 14235, 14325.

154. Введём краткие обозначения для предметов: Р, Б, З, А. Выпишем все возможные пары, составленные из двух разных предметов: РБ, РЗ, РА, БЗ, БА, ЗА. Всего имеется 6 таких пар. Значит, 10 различных выигрышей составить нельзя.

Глава 3. Действия с натуральными числами (22 урока)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
3.1. Сложение и вычитание	3	92—106 (ч. 1)	О-7, О-8, О-9, О-10 П-6, П-7, «Проверь себя»	**Называть** компоненты действий сложения и вычитания. **Применять** буквы для записи свойств нуля при сложении и вычитании. **Выполнять** сложение и вычитание натуральных чисел. **Применять** взаимосвязь сложения и вычитания для нахождения неизвестных компонентов этих действий, для самопроверки при выполнении вычислений. **Находить** ошибки и **объяснять** их. **Познакомиться** с приёмами прикидки и оценки суммы нескольких слагаемых, **применять** эти приёмы в практических ситуациях. **Решать** текстовые задачи на сложение и вычитание, **анализировать** и **осмысливать** условие задачи
3.2. Умножение и деление	5	107—119 (ч. 1)	О-11, О-12, О-13, О-14, О-15, П-8, П-9, «Проверь себя»	**Называть** компоненты действий умножения и деления. **Применять** буквы для записи свойств нуля и единицы при умножении и делении. **Выполнять** умножение и деление натуральных чисел. **Применять** взаимосвязь умножения и деления для нахождения

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
				неизвестных компонентов этих действий, для самопроверки при выполнении вычислений. **Познакомиться** с приёмами прикидки и оценки произведения нескольких множителей, **применять** приёмы самоконтроля при выполнении вычислений. **Находить** ошибки и **объяснять** их. **Решать** текстовые задачи на умножение и деление, **анализировать** и **осмысливать** условие задачи. **Анализировать** числовые последовательности, **находить** правила их конструирования
3.3. Порядок действий в вычислениях	4	120—125 (ч. 1)	О-16, П-10, П-11, «Проверь себя»	**Вычислять** значения числовых выражений, содержащих действия разных ступеней, со скобками и без скобок. **Оперировать** с математическими символами, действуя в соответствии с правилами записи математических выражений. **Решать** текстовые задачи арифметическим способом, используя различные зависимости между величинами (скорость, время, расстояние; работа, производительность, время и т. д.): **анализировать** и осмысливать текст задачи; **осуществлять самоконтроль**, проверяя ответ на соответствие условию

Продолжение

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
3.4. Степень числа	3	126—133 (ч. 1)	О-17, П-12, «Проверь себя»	**Оперировать** символической записью степени числа, заменяя произведение степенью и степень произведением. **Вычислять** значения степеней, значения числовых выражений, содержащих квадраты и кубы натуральных чисел. **Применять** приёмы прикидки и оценки квадратов и кубов натуральных чисел, использовать эти приёмы для самоконтроля при выполнении вычислений. **Анализировать** на основе числовых экспериментов закономерности в последовательностях цифр, которыми оканчиваются степени небольших чисел
3.5. Задачи на движение	4	134—135 (ч. 1)	О-18, О-19, П-13, П-14	**Решать** текстовые задачи арифметическим способом, используя зависимость между скоростью, временем, расстоянием: **анализировать** и осмысливать текст задачи; **моделировать** условие с помощью схем и рисунков; **переформулировать** условие; **строить логическую цепочку рассуждений**; критически **оценивать** полученный ответ, **осуществлять самоконтроль**, проверяя ответ на соответствие условию
Обзор и контроль	3	**Вычислять** значения числовых выражений. **Называть** компоненты арифметических действий, **находить** неизвестные компоненты действий. **Записывать** в буквенной		

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
Обзор и контроль	3			форме свойства нуля при сложении и вычитании, нуля и единицы при умножении и делении. **Находить** и **объяснять** ошибки. **Называть** основание и показатель степени, **находить** квадраты и кубы чисел, **вычислять** значения выражений, содержащих степени. **Анализировать** числовые равенства и числовые закономерности, **применять** подмеченные закономерности в ходе решения задач. **Решать** текстовые задачи арифметическим способом

Основные цели: закрепить и развить навыки арифметических действий с натуральными числами, ознакомить с элементарными приёмами прикидки и оценки результатов вычислений, углубить навыки решения текстовых задач арифметическим способом.

Обзор главы. Особенностью изложения материала в курсе является совместное рассмотрение прямых и обратных операций над числами: сложения и вычитания, умножения и деления. Это целесообразно и возможно потому, что у учащихся уже имеется достаточный опыт выполнения этих действий, а одновременное их рассмотрение позволяет лучше уяснить взаимосвязь прямых и обратных операций.

В то же время отработка навыков выполнения арифметических действий с натуральными числами по-прежнему остаётся важнейшей целью. Для её достижения в учебнике содержится достаточное число заданий. Их следует использовать в той степени, которая определяется реальным уровнем вычислительной подготовки детей. При этом предлагаемые упражнения весьма разнообразны. Среди них есть и такие, которые дают возможность ощутить гармонию чисел, увидеть ту или иную закономерность.

Принципиально новым материалом для учащихся являются приёмы прикидки и оценки результата вычислений (например, определение высшего разряда результата, оценка результата снизу или сверху), а также некоторые приёмы проверки правильности выполнения арифметических действий (например, определение цифры, которой должен оканчиваться результат).

Эта линия будет последовательно продолжена в 5 и 6 классах при изучении дробей и рациональных чисел. Овладение соответствующими умениями чрезвычайно важно с точки зрения интеллектуального развития школьников для выработки привычки к самоконтролю и формирования адекватных для этой цели навыков.

Решение комплексных примеров на все действия с натуральными числами позволяет закрепить умение устанавливать правильный порядок действий. Вводится новое понятие «степень числа» и вычисляются значения выражений, содержащих степени. Продолжается развитие умения решать текстовые задачи арифметическим способом. Специальное внимание уделяется решению задач на движение.

В ходе выполнения упражнений учащиеся вовлекаются в ситуации из реальной жизни, требующие применения полученных умений.

Материалы для контроля.

Учебное пособие «Контрольные работы»: Контрольная работа № 2 «Действия с натуральными числами».

Учебное пособие «Тематические тесты»: Тест 3 «Действия с натуральными числами».

3.1. Сложение и вычитание

Методический комментарий

Основная цель первых упражнений — восстановление знаний и умений учащихся, связанных с действиями сложения и вычитания натуральных чисел. Это знание таблицы сложения однозначных чисел, названий компонентов сложения и вычитания, свойств нуля при сложении и вычитании, умение складывать и вычитать трёх-четырёхзначные числа, решать текстовые задачи, требующие понимания отношений «больше (меньше) на», смысла слов «всего», «вместе», «осталось».

При отработке вычислительных навыков в системе упражнений предусматриваются различные случаи перехода из разряда в разряд: сложение чисел с переходом через десяток (315 + 426), через сотню (664 + 274), через десяток и сотню (548 + 277); вычитание чисел с раздроблением десятка (375 – 158), сотни (462 – 181), десятка и сотни (622 – 333). Разумеется, «методическая кухня» не для учеников, просто нужно при восстановлении и развитии навыков предусмотреть все эти случаи. Время, отводимое на актуализацию соответствующих навыков, зависит от уровня предварительной подготовки класса.

В дополнение к материалу пункта на конкретном примере можно напомнить учащимся, что алгоритмы сложения и вычитания натуральных чисел «в столбик», как и алгоритмы письменного выполнения других арифметических действий, основываются на особенностях позиционной системы записи чисел. Например, будем складывать числа 53 и 78 поразрядно — отдельно единицы и отдельно десятки:

$$53 + 78 = (50 + 3) + (70 + 8) = (50 + 70) + (3 + 8) = (50 + 70) + \\ + (10 + 1) = (50 + 70 + 10) + 1 = 100 + 30 + 1 = 131.$$

И таким образом, запись столбиком является краткой записью выполненных действий.

Важнейшей целью изучения материала этого пункта является уяснение взаимосвязи между сложением и вычитанием, которое достигается путём выполнения упражнений из учебника типа **161—165**.

Задания **171—175** направлены на формирование оценочных умений (последнее с практическим контекстом). В ходе выполнения этих заданий учащимся приходится находить два соседних круглых числа, между которыми заключено данное число (либо одно из этих чисел — меньшее или большее), округлять данное число (например, до старшего разряда). Таким образом, материал предыдущей главы, связанный с округлением чисел, получает дальнейшее развитие и закрепление.

Кроме того, определённое внимание должно уделяться формированию навыков самоконтроля при выполнении вычислений. Этому способствуют, например, такие упражнения, как **163**, **173**. Заметим, что любую ошибку, допущенную учеником при выполнении арифметических действий с натуральными числами, учитель может использовать для формирования навыков самоконтроля, предлагая классу вопросы типа: «Ответ неверный. Можете ли вы объяснить почему?»

Особое внимание необходимо уделять умению выполнять арифметические действия устно. С помощью устных вычислений развивается память, быстрота реакции, умение сосредоточиться. Приёмы устного счёта основаны на использовании десятичного состава числа и свойств арифметических действий. Они знакомы учащимся из курса начальной школы и должны быть доведены до навыка применительно к действиям с одно-двузначными числами. Задания для тренировки в устном счёте помещены в рабочей тетради.

Среди упражнений встречаются задания на нахождение неизвестных компонентов сложения и вычитания (см. упражнение **164**). Для их решения используются правила, основанные на зависимости между компонентами арифметических действий. Учащиеся часто затрудняются в применении этих правил. Поэтому их целесообразно познакомить с приёмом использования «маленького примера», показанным в образце к обучающей работе О-7 (дидактические материалы).

Текстовые задачи, дополняющие упражнения учебника, помещены в работах О-8 и О-9. Обращаем внимание на работу О-9: её основная цель — сформировать умение проверять правильность ответа, полученного при решении задачи.

Комментарий к упражнениям

171. Рассуждения проводятся устно, например, так, как показано в образце.

173. а) $284 + 634 \approx 300 + 600 = 900$; $284 + 634 = 918$. Точное значение суммы на 18 больше полученного прикидкой.

174. Ответ можно получить, выполнив «точные» вычисления и затем округлив результат до тысяч, а можно прикидкой, предварительно округлив слагаемые. В книгохранилище примерно 34 тыс. книг. Ответ: 4).

178. Обсудите, как можно рассуждать при нахождении требуемых чисел. $33\,321 - 11\,123 = 22\,198$.

181. а) Каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих чисел. Имеем 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ...

б) Каждое число, начиная со второго, может быть получено прибавлением его «номера» к предыдущему числу:

первое число: 1,

второе число: $1 + \underline{2} = 3$,

третье число: $3 + \underline{3} = 6$,

четвёртое число: $6 + \underline{4} = 10$, и т. д.

Действуя таким же образом, получим следующие пять чисел:

$10 + 5 = 15$, $15 + 6 = 21$, $21 + 7 = 28$, $28 + 8 = 36$, $36 + 9 = 45$.

182. б) Жёлтых: $27 - 4 = 23$ штуки. Красных, синих и жёлтых: $27 + 23 = 50$ штук. Зелёных: $80 - 50 = 30$ штук. Красных: $30 - 15 = 15$ штук. Синих: $27 - 15 = 12$ штук.

183. а) Возможны разные последовательности действий. Например, зная общую массу всех трёх плодов и массу яблока и апельсина, можно найти массу груши. Для этого достаточно из общей массы вычесть массу яблока и апельсина: $565 - 415 = 150$ (г). Точно так же можно найти массу яблока: $565 - 430 = 135$ (г). Остаётся найти массу апельсина. Для этого можно от общей массы яблока и апельсина отнять массу яблока или от общей массы апельсина и груши отнять массу груши. Масса апельсина равна 180 г.

Можно попросить учащихся предложить другие пути рассуждения.

При решении задачи полезно записать условие задачи схематически, «закодировав» фрукты, например, первой буквой названия плода:

$$а + я = 415,$$
$$а + г = 430,$$
$$а + г + я = 505.$$

Такая запись подскажет способы рассуждения.

б) При решении этой задачи, так же как и задачи в пункте «а», полезно закодировать название цвета первой буквой соответствующего слова и записать условие в виде такого рода схемы:

$$к + с + з + ж = 44,$$
$$к + с + з = 37,$$
$$с + з + ж = 29,$$
$$к + з + ж = 32.$$

Из этой записи легко видно, какие разности надо находить.

Ответ: 15 красных флажков, 12 синих, 10 зелёных и 7 жёлтых.

3.2. Умножение и деление

Методический комментарий

Логика этого пункта аналогична логике предыдущего пункта. Первые упражнения направлены на восстановление основных знаний и умений учащихся, связанных с умножением и делением натуральных чисел. Это знание таблицы умножения однозначных чисел, названий компонентов умножения и деления, свойств нуля и единицы при умножении и делении, умения выполнять умножение трёхзначных чисел, деление трёх-четырёхзначных чисел на одно-двузначное, решать несложные задачи, требующие понимания отношений «больше (меньше) в...», выражений «поровну», «во сколько раз».

При отработке навыков умножения нужно предусмотреть упражнения на умножение многозначного числа на однозначное (53 400 · 7), случаи умножения на 10, на 100 и т. д., умножение трёхзначного числа на двузначное (873 · 16), на трёхзначное (295 · 136), в том числе и случаи, усложняющие умножение, когда у множителя имеются нули на конце и в середине (2450 · 600, 1623 · 204). Полезно обратить внимание учеников на то, как можно упрощать процесс умножения многозначных чисел. Так, удобнее умножать на множитель, у которого меньше цифр, либо на число, в записи которого содержатся одинаковые цифры или цифры, меньшие, чем у другого множителя (1476 · 35, 742 · 2111, 678 · 123).

Деление — это самая трудная для учащихся вычислительная операция, а времени, отводимого в начальной школе для овладения ею, явно недостаточно. Надо обратить внимание на случаи деления на однозначное, двузначное и трёхзначное числа (51 500 : 5, 35 719 : 23, 6732 : 33, 19 360 : 605).

Здесь также должно быть уделено внимание уяснению взаимосвязи умножения и деления, чему способствует выполнение упражнений типа **197—200**.

Продолжается формирование навыков самоконтроля. Проверка вычислений осуществляется с помощью обратной операции (упражнение **198**), а также с использованием приёмов прикидки результата (упражнения **204—206**), поиска цифры, которой должен оканчиваться ответ (упражнение **205**).

Здесь уместно продолжить формирование навыков устного счёта. С этой целью можно использовать задания из рабочей тетради. Полезны также вопросы типа:

«Во сколько раз груз в 75 кг (90 кг, 60 кг) тяжелее груза в 15 кг?»,

«С какой скоростью шёл лыжник, если он прошёл 48 км за 3 ч (56 км за 4 ч, 60 км за 4 ч)?»,

«Ленту длиной 48 см (90 см, 52 см) разрезали пополам. Какова длина каждой части ленты?».

Комментарий к упражнениям

200. Ответ: а) 2880 = 45 · 64; б) 10 323 = 111 · 93.

206. Здесь срабатывают два приёма: определение последней цифры результата и прикидка.

208—210. При решении этих задач следует напомнить учащимся, как связаны между собой расстояние, время и скорость движения.

211. Условия задач целесообразно изображать в виде схематического рисунка.

215. (Практическая ситуация.) При решении задачи целесообразно сочетать коллективную и групповую формы работы. Таблицу надо перенести в тетради, а также в той или иной форме представить для всеобщего обозрения (начертить на доске, использовать интерактивную доску, проектор и т. д.). Сначала совместно с учителем разобраться в условии задачи, проанализировать таблицу. Можно обратить внимание школьников на наличие закономерности в последовательности чисел, записанных в верхней строке: масса каждой следующей упаковки увеличивается на 200 г по сравнению с предыдущей. Значит, число шоколадок увеличивается на 4 в каждой следующей упаковке. Установив эту закономерность, легко заполнить вторую строку таблицы. Далее можно разбить учащихся на группы для заполнения третьей строки и затем внести результаты вычислений в «общую» таблицу. Понятно (это выясняется в ходе коллективного обсуждения), что для 60 участников выгоднее всего взять самые большие упаковки по 30 шоколадок в каждой. Если планируется каждому участнику выдать по одной шоколадке, то всего надо 2 упаковки, т. е. стоимость покупки составит 720 р.

Дополнительное задание: рассчитать наиболее выгодную стоимость покупки для 76 человек, если каждому предполагается выдать по одной шоколадке. Можно также составить несколько заданий — для каждой группы отдельное.

219. б) Сделав рисунок по условию задачи (рис. 4), можно заметить, что расстояние, равное 560 – 240 = 320 (м), Андрей проходит за 12 – 8 = 4 (мин).

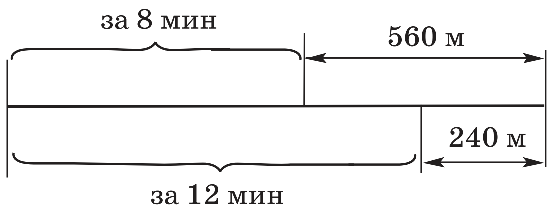


Рис. 4

Ответ: расстояние от дома до станции 1200 м; вся дорога занимает 15 мин.

3.3. Порядок действий в вычислениях

Методический комментарий

В этом материале нет принципиально новых идей по сравнению с тем, что изучалось в начальной школе. Тем не менее уделить внимание вопросу о порядке действий здесь необходимо: практика показывает, что значительная часть учащихся в начальной школе не овладевает в достаточной степени соответствующими навыками.

В заданиях данного пункта основной акцент делается на выражения, содержащие действия разных ступеней. Выполнение соответствующих упражнений целесообразно начинать с установления порядка выполнения действий. При этом полезно обратить внимание на упражнения **224—229**, центральной идеей которых является именно эта деятельность. Целесообразно также предложить учащимся специальные упражнения из дидактических материалов, в которых требуется только установить и обозначить порядок выполнения действий (см., например, соответствующие работы в дидактических материалах).

Желательно дать возможность учащимся контролировать промежуточные результаты при вычислении значений «длинных» выражений (типа упражнения **241**). Для этого нужно сделать так, чтобы через 2—3 действия они могли сравнить свой ответ с ответом соседа либо с ответом, предложенным учителем. (Ниже для учителя приводятся промежуточные результаты и ответы к заданиям **224**, **230—232**, **240—241**.)

Запись хода вычислений учащиеся могут вести отдельными действиями или «цепочкой». В последнем случае необходимо следить за тем, чтобы запись была грамотной и учащиеся не теряли «фрагменты» исходного выражения. Например, встречаются такие неверные записи:

$$282 : (150 - 8 \cdot 7) + 14 \cdot 7 = 282 : (150 - 56) = 282 : 94 = 3 + 98 = 101.$$

Не нужно стремиться выполнить все задания этого пункта за время, отведённое в планировании на его рассмотрение. Упражнения здесь даны с избытком, и они должны отбираться с учётом реальной потребности совершенствования вычислительной подготовки детей. Задания, не использованные в ходе отведённых на изучение этого пункта уроков, можно включать в уроки и домашние задания при изучении последующих тем курса.

Комментарий к упражнениям

224. а) $1854 + 636 = 2490$;
б) $3320 - 1090 + 175 = 2230 + 175 = 2405$;
в) $52 : 4 \cdot 20 = 13 \cdot 20 = 260$;
г) $400 \cdot 50 : 125 = 20\,000 : 125 = 160$.

230. б) $2346 : 23 \cdot 15 = 102 \cdot 15 = 1530$;
в) $6422 - 24 \cdot 31 = 6422 - 744 = 5678$;
г) $2678 : 26 + 297 = 103 + 297 = 400$;
д) $77 \cdot 104 - 99 = 8008 - 99 = 7909$;
е) $874 - (2430 - 1999) = 874 - 431 = 443$;
ж) $(59 + 326) \cdot 60 = 385 \cdot 60 = 23\ 100$;
з) $560 \cdot 35 - 898 = 19\,600 - 898 = 18\ 702$.

231. а) $9 \cdot 451 + 941 = 4059 + 941 = 5000$;
б) $8000 - 530 \cdot 15 = 8000 - 7950 = 50$;
в) $101 \cdot 57 = 5757$;
г) $819 - 35 + 206 = 784 + 206 = 990$;
д) $256 + 1422 : 9 = 256 + 158 = 414$;
е) $(201 - 102) \cdot 101 = 99 \cdot 101 = 9999$.

232. а) $136 \cdot 80 - 10\ 100 = 10\,880 - 10\,100 = 780$;
б) $140 + 210 + 982 = 1332$;
в) $1953 + (17\,432 - 12\,488) : 16 = 1953 + 4944 : 16 = 1953 +$
$+ 309 = 2262$;
г) $6010 - (6760 - 830) = 80$.

234—236. Целесообразно предложить учащимся прокомментировать составленное выражение.

235. а) Многие учащиеся при составлении выражения используют скобки: $(12 \cdot 40 + 8 \cdot 30) - 340$. Не надо настаивать, чтобы скобки были сняты.

236. а) Возможны разные выражения $(46 + 42) \cdot 4$ и $46 \cdot 4 + 42 \cdot 4$, которые составлены по смыслу задачи и имеют разный комментарий.

237. Возможны такие варианты:

$25 + 7 \cdot 3 - 2$;	$25 \cdot 7 + 3 - 2$;	$25 - 7 + 3 \cdot 2$;
$25 + 7 - 3 \cdot 2$;	$25 \cdot 7 - 3 + 2$;	$25 - 7 \cdot 3 + 2$.

239. Например:
а) $3 \cdot (3 + 3 : 3 - 3) = 3$; $3 \cdot (3 + 3) : 3 - 3 = 3$;
б) $3 \cdot (3 + 3 : 3) - 3 = 9$; $(3 \cdot 3 + 3) : 3 - 3 = 1$.

240. а) $97 + 506 + 36\ 944 - 34\ 787 = 2760$;
б) $988 + 675 = 1663$;
в) $4080 - 3009 + 32\ 849 = 33\ 920$;
г) $415\ 400 - 15\ 000 = 400\ 400$.

241. а) 256 036 – 255 000 = 1036;
б) 144 + 27 = 171;
в) (5958 – 5440) : 14 + 3718 = 3755;
г) (429 336 + 5280) : 24 – 8154 = 18 109 – 8154 = 9955.

242. 110 = 15 · 2 + 10 · 8 = 15 · 4 + 10 · 5 = 15 · 6 + 10 · 2.

248. Если сложить вес трёх пар, то он будет равен удвоенному весу трёх мальчиков: 55 + 58 + 59 = 172 (кг). Тогда вес трёх мальчиков равен 172 : 2 = 86 (кг). Это даёт возможность найти вес каждого: Петя весит 28 кг, Коля — 27 кг, Слава — 31 кг.

250. При решении задач необходимо учитывать, что цифры в записи числа могут повторяться.

а) Проще всего записать все двузначные числа, которые можно составить, используя только цифры 2, 3 и 4, и выбросить из полученного списка чётные числа:

22, 23, 24,
32, 33, 34,
42, 43, 44,

Итак, ответом являются: 23, 33, 43; всего 3 числа.

б) Можно поступить таким же образом, как в пункте «а», но работы при этом будет несколько больше. Поэтому можно поступить так: учитывая, что среди данных цифр только одна нечётная — цифра 3, будем выписывать числа (в порядке возрастания), оканчивающиеся цифрой 3. При этом можно воспользоваться списком всех двузначных чисел, полученных при решении задачи в пункте «а», приписав к каждому справа цифру 3:

223, 233, 243,
323, 333, 343,
423, 433, 443.

Ответ: Всего 9 чисел.

3.4. Степень числа

Методический комментарий

Это место курса — первый проход в изучении степеней. Здесь учащиеся должны научиться понимать смысл таких записей, как 2^5, 3^{10}, уметь читать их, представлять степень в виде произведения равных множителей и произведение равных множителей в виде степени, понимать и уметь употреблять термины «степень», «показатель степени», «основание степени». Буквенная запись пока не используется, определение степени в явном виде не формулируется, и случай, когда показатель степени равен единице, не рассматривается.

Что касается вычислительных умений, то они относятся в основном лишь к нахождению квадратов и кубов чисел. Надо стараться, чтобы учащиеся постепенно запомнили квадраты чисел в рамках таблицы умножения ($9^2 = 81$, $8^2 = 64$ и др.), а также некоторые кубы чисел ($2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $10^3 = 1000$). Нужно также поощрять запоминание некоторых часто встречающихся степеней, таких как 11^2, 12^2, 13^2, 15^2, 4^3, 5^3.

Обращается внимание на порядок действий при вычислении значений выражений, содержащих степени. Разобранные примеры ориентируют на то, чтобы учащиеся привыкли анализировать структуру выражения, понимать его смысл.

Полезно вернуться к упражнению **214**, *а* из п. 3.2 и выполнить его ещё раз, используя понятие степени, а именно, представить числа рассмотренной последовательности в виде степени с основанием 2.

Обратим внимание, что в упражнениях **276—279** используются уже знакомые учащимся приёмы беглой проверки результата — проверка по последней цифре, прикидка с целью определения порядка числа в ответе, оценка путём замены некоторых чисел подходящими круглыми числами.

Комментарий к упражнениям

266. а) 1350; б) 845; в) 12 800; г) 10 206; д) 256; е) 729; ж) 14 400; з) 6860.

271. а) Это последовательные квадраты натуральных чисел. На сотом месте стоит число $100^2 = 10\,000$.

б) Это кубы натуральных чисел. На сотом месте — число $100^3 = 1\,000\,000$.

273. а) $1681 + 1849 + 2025 = 5555$;
б) $1331 + 1728 + 2197 + 2744 = 8000$;
в) $8 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1000$.

275. а) $21^2 = 441$ и $29^2 = 841$ — два решения; б) $34^2 = 1156$ и $36^2 = 1296$ — два решения; в) $75^2 = 5625$ — одно решение; г) $23^2 = 529$ и $27^2 = 729$ — два решения.

283. а) Выписывая числа, учитываем, что на третьем месте в числе могут стоять только цифры 2 или 4; цифра в записи числа может присутствовать не более одного раза. Чтобы не пропустить ни одного числа, придерживаемся порядка выписывания чисел по возрастанию:

124, 132, 134, 142,
214, 234,
312, 314, 324, 342,
412, 432.

Всего 12 чисел.

б) Понятно, что нечётных чисел столько же, сколько чётных, т. е. 12:

123, 143,
213, 231, 241, 243,
321, 341,
413, 421, 423, 431.

3.5. Задачи на движение

Методический комментарий

Общие рекомендации

С этого пункта начинается обучение приёмам решения некоторых видов текстовых задач. В связи с этим остановимся на общих методических установках, которые следует иметь в виду при изложении материала данного пункта и в последующем.

1. Обучение решению текстовых задач арифметическим способом нацелено прежде всего на развитие мышления учащегося. Поэтому здесь важен не столько результат, сколько сам процесс решения задачи. Способ рассуждения должен быть представлен максимально ясно и доступно.

2. Этот вид учебных заданий сложен для учащихся, и лишь немногие задачи включены в обязательные результаты обучения по курсу 5 класса. Решать можно и нужно со всеми школьниками различные задачи, в том числе и сложные, но требовать от всех в обязательном порядке следует значительно меньше.

3. Не следует стремиться прорешать все задачи, содержащиеся в учебнике и дидактических материалах за время, отведённое на изучение данного вида задач в поурочном планировании. Оставшиеся задачи можно включать в уроки при изучении других вопросов. Кроме того, учитывая уровень подготовки учащихся, можно отказаться от рассмотрения некоторых задач.

4. Важно убедиться, что учащиеся понимают все термины и обороты речи, используемые в тексте задачи, что они понимают саму ситуацию, описанную в ней. Иногда эту ситуацию полезно даже разыграть.

5. Не менее важно также использование в процессе решения схематических рисунков, моделей, позволяющих представить рассматриваемую ситуацию в наглядной форме. Это принципиальное условие, без которого многим учащимся трудно будет понять логику рассуждений. Учащиеся и сами должны приобрести привычку изображать условие задачи в виде схематического рисунка. Это поможет осознать и запомнить условие, увидеть способ решения задачи и проверить себя — убедиться в том, что задача решена верно.

6. Одна из целей решения текстовых задач арифметическим способом — развитие речи. Учащиеся должны пересказывать условие, анализировать его, при необходимости переформулировать, ставить вопросы и давать на них развёрнутые ответы.

7. При переходе к рассмотрению нового вида задач полезно полное решение хотя бы одной из них (по вопросам или с пояснениями) записать в тетради, чтобы его можно было использовать в качестве образца.

Советы к задачам на движение

Первый специальный вид текстовых задач — это задачи на движение. При изучении п. 3.2 учащиеся уже имели возможность вспомнить, как решаются простейшие задачи на движение. Здесь целесообразно ещё раз повторить, какая зависимость связывает расстояние, время и скорость движения, что означает термин «скорость» (скорость показывает, какое расстояние проходит объект в единицу времени: например, сколько километров за один час проезжает автомобиль; сколько метров за одну минуту проплывает пловец; сколько метров за одну секунду пробегает спортсмен). В связи с этим полезно проверить умение решать задачи примерно следующего содержания:

1. Автомобиль проехал 120 км за 3 ч. С какой скоростью ехал автомобиль?

2. Автомобиль едет со скоростью 60 км/ч. Какое расстояние проедет он за 4 ч?

3. Автомобиль едет со скоростью 50 км/ч. За какое время он проедет 100 км?

Текст задачи и решение целесообразно записать в тетрадях, чтобы в дальнейшем в случае затруднения учащиеся могли к ним обратиться как к опорным ситуациям. Не надо требовать от учащихся заучивания правил нахождения скорости по расстоянию и времени и т. д. Каждый раз при решении следует обращаться к здравому смыслу, рассуждать, а в случае затруднения — к опорной задаче.

Решение задач на движение в противоположных направлениях и навстречу друг другу (**285—290**) можно начать с объяснения терминов «скорость удаления» и «скорость сближения». Нецелесообразно и неэффективно требовать от учащихся запоминания каких-либо «правил» решения данного вида задач или задавать вопросы типа: «Как найти скорость сближения?» Следует приучить учеников при решении каждой задачи рассуждать и выяснять, сближаются или удаляются друг от друга машины (пешеходы и пр.) и с какой скоростью. Существенную помощь при решении задач на движение оказывает схематический рисунок, сделанный по условию задачи.

Серия задач на движение по реке начинается с задачи **291**, предназначенной для устного разбора и нацеленной на понимание вопроса о том, как меняется скорость при движении по течению и против течения реки.

Комментарий к упражнениям

При решении всех задач группы **Б**, прежде чем записывать решение, следует проговорить устно ход рассуждений и во многих случаях с опорой на рисунок. И только после того, как учащиеся поняли ход решения задачи, оформить решение письменно — с комментариями или по вопросам.

Задачи **300**, **301** — это «цепочка» задач, их надо решать последовательно.

300. а) Когда Николай вышел из школы, расстояние между мальчиками было $90 \cdot 10 = 900$ (м). За 5 мин Николай пройдёт $100 \cdot 5 = 500$ (м), а Андрей — $90 \cdot 5 = 450$ (м). Поэтому через 5 мин после выхода Николая между ними будет $900 + 500 + 450 = 1850$ (м) (рис. 5).

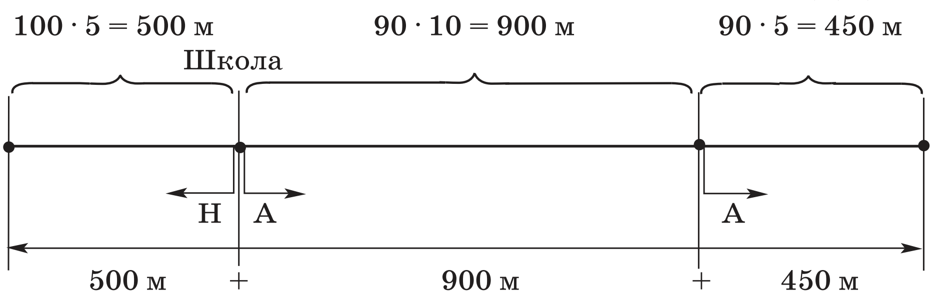


Рис. 5

Или: в тот момент, когда Николай вышел из школы, расстояние между мальчиками было 900 м. Они начали удаляться друг от друга со скоростью 190 м/мин. За 5 мин они удалились друг от друга на 950 м, и расстояние между ними стало 900 + 950 = 1850 (м).

Можно рассуждать и так: Николай находился в пути 5 мин, а Андрей — на 10 мин больше, т. е. 5 + 10 = 15 (мин). Поэтому расстояние между ними $100 \cdot 5 + 90 \cdot 15 = 1850$ (м) (рис. 6).

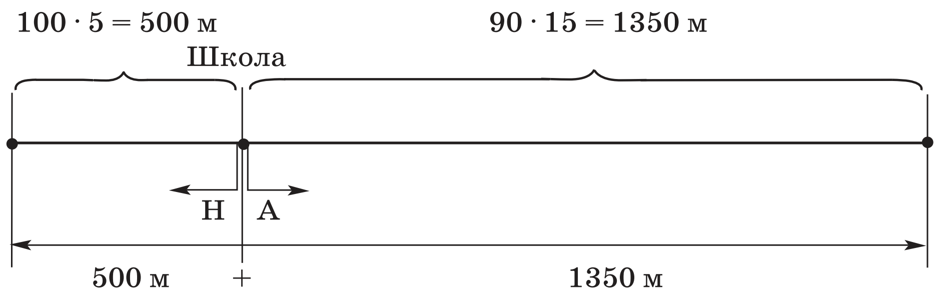


Рис. 6

Записать решение можно так:

1) 10 + 5 = 15 (мин) — время, которое находился в пути Андрей;

2) $90 \cdot 15 = 1350$ (м) — расстояние, которое Андрей прошёл за это время;

3) $100 \cdot 5 = 500$ (м) — расстояние, которое прошёл за 5 мин Николай;

4) 1350 + 500 = 1850 (м) — расстояние между мальчиками.

б) Задача обсуждается с помощью рисунка 7.

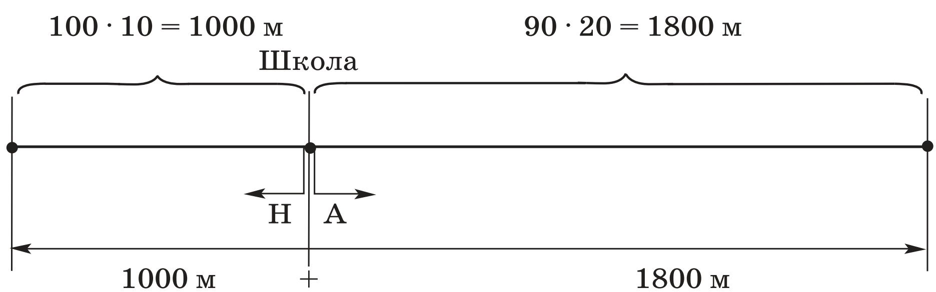


Рис. 7

1) 20 – 10 = 10 (мин) — время, которое находился в пути Николай;

2) $100 \cdot 10 = 1000$ (м) — расстояние, которое Николай прошёл за это время;

3) $90 \cdot 20 = 1800$ (м) — расстояние, которое прошёл за 20 мин Андрей;

4) $1000 + 1800 = 2800$ (м) — расстояние между мальчиками.

Задачи **302**, **303** — это «цепочка» задач, их следует решать одну за другой.

302. Следует обратить внимание учащихся на то, что до выхода второго объекта первый уже прошёл какое-то расстояние. После того как это расстояние найдено, задача сводится к простой, уже хорошо знакомой задаче на встречное движение.

303. На рисунке 8 показаны два варианта решения для случая «а»,

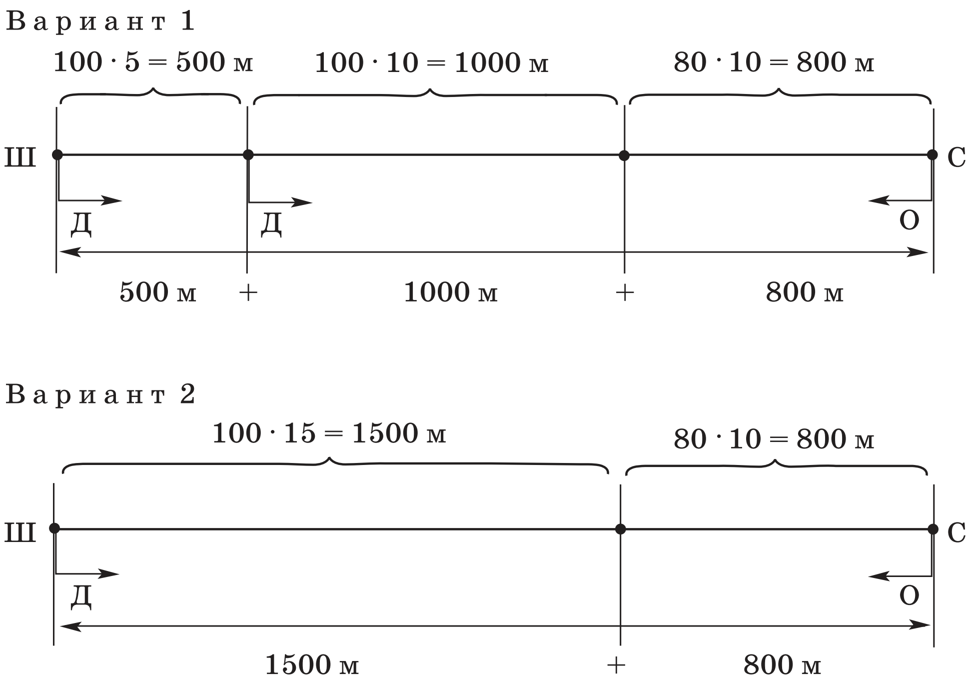


Рис. 8

на рисунке 9 показаны два варианта решения для случая «б».

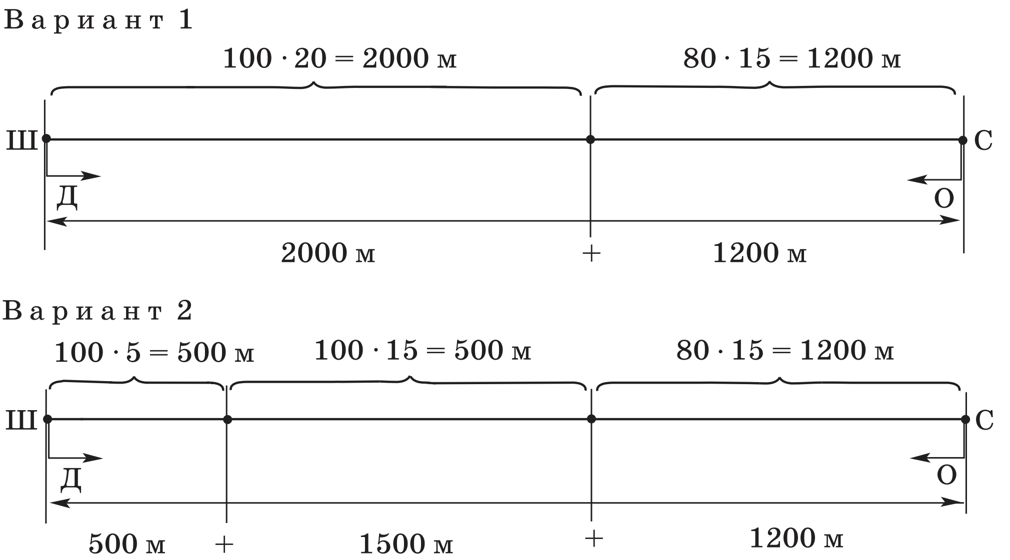


Рис. 9

304. Расстояние 540 м будет между мальчиками дважды — до встречи и после встречи (рис. 10 и 11). Скорость сближения (до встречи) и удаления (после встречи) равна 360 м/мин. Получаем (900 – 540) : 360 = 1 (мин) и (900 + 540) : 360 = 4 (мин).

О т в е т: через 1 мин и через 4 мин.

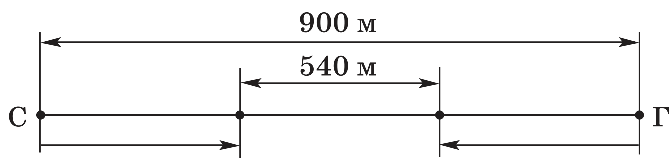


Рис. 10

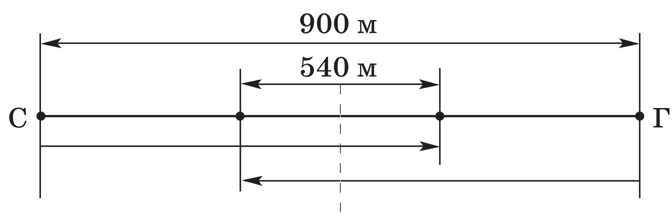


Рис. 11

305. Собака бегала между охотниками столько минут, сколько им понадобилось пройти до встречи, т. е. 3 мин. Скорость собаки 12 км/ч = 200 м/мин. За 3 мин собака пробежала 600 м.

Задачи **306**, **307** — это «цепочка» задач, их следует решать одну за другой. Ключевой является задача **306**.

306. Чтобы решить эту задачу, надо понять, что разность между скоростью катера по течению и скоростью катера против течения равна удвоенной скорости течения. Понять это поможет рисунок 12. Полезно также параллельно с построением рисунка «проговорить» эту ситуацию: скорость катера по течению реки равна его собственной скорости плюс скорость течения; скорость катера против течения реки равна его собственной скорости минус скорость течения. Значит, скорость катера по течению больше скорости против течения на две скорости течения.

Рис. 12

309. Запись решения можно вести так:

$82^2 = 6724;$

$820^2 = 820 \cdot 820 = (82 \cdot 10) \cdot (82 \cdot 10) = 82 \cdot 82 \cdot 10 \cdot 10 =$
$= 82^2 \cdot 100 = 672\ 400;$

$8200^2 = 8200 \cdot 8200 = 82 \cdot 82 \cdot 100 \cdot 100 = 82^2 \cdot 10\,000 = 67\,240\,000.$

Глава 4. Использование свойств действий при вычислениях (12 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
4.1. Свойства сложения и умножения	2	136—144 (ч. 1)	О-20	**Записывать** с помощью букв переместительное и сочетательное свойства сложения и умножения. **Формулировать** правила преобразования числовых выражений на основе свойств сложения и умножения. **Использовать** свойства действий для группировки слагаемых в сумме и множителей в произведении, **комментировать** свои действия. **Анализировать** и **рассуждать** в ходе исследования числовых закономерностей
4.2. Распределительное свойство	3	145—148 (ч. 1)	О-20 П-15	**Обсуждать** возможность вычисления площади прямоугольника, составленного из двух прямоугольников, разными способами. **Записывать** с помощью букв распределительное свойство умножения относительно сложения (вычитания). **Формулировать** и **применять** правило вынесения общего множителя за скобки и выполнять обратное преобразование. **Участвовать** в обсуждении возможных ошибок в цепочке

Продолжение

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
				преобразований числового выражения. **Решать** текстовые задачи арифметическим способом, предлагать разные способы решения
4.3. Задачи на части	3	149 (ч. 1)	О-21 П-16	**Анализировать** и **осмысливать** текст задачи, **переформулировать** условие, **извлекать** необходимую информацию. **Моделировать** условие задачи, используя реальные предметы и рисунки. **Распознавать** задачи на части. **Решать** задачи по предложенному плану, планировать ход решения задачи. **Оценивать** полученный ответ, **осуществлять самоконтроль**, проверяя ответ на соответствие условию. **Применять** новые способы рассуждения к решению задач, отражающих жизненные ситуации
4.4. Задачи на уравнивание	2	150—151 (ч. 1)	О-22 П-17	**Анализировать** и **осмысливать** текст задачи, **переформулировать** условие, **извлекать** необходимую информацию. **Моделировать** условие задачи, используя реальные предметы и рисунки. **Распознавать** задачи на уравнивание. **Решать** задачи по предложенному плану, **планировать** ход решения задачи. **Оценивать** полученный ответ, **осуществлять самоконтроль**,

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
				проверяя ответ на соответствие условию. **Применять** новые способы рассуждения к решению задач, отражающих жизненные ситуации
Обзор и контроль	2	**Группировать** слагаемые в сумме и множители в произведении. **Раскрывать** скобки в произведении и выносить в сумме общий множитель за скобки. **Применять** разнообразные приёмы рационализации вычислений, записывая соответствующую цепочку равенств. **Решать** задачи на части, на уравнивание		

Основные цели: расширить представление учащихся о свойствах арифметических действий, продемонстрировать возможность применения свойств для преобразования числовых выражений.

Обзор главы. Основное содержание главы связано с рассмотрением переместительного и сочетательного свойств сложения и умножения, а также распределительного свойства умножения относительно сложения. Переместительное и сочетательное свойства известны учащимся из начальной школы. Новым на этом этапе является введение обобщённых свойств, которые сформулированы в виде правил преобразования суммы и произведения. С распределительным свойством учащиеся встречаются впервые. Показывается его применение для преобразования произведения в сумму и наоборот. Мотивировкой для преобразования выражений на основе свойств действий служит возможность рационализации вычислений. Кроме того, в главу включены фрагменты, посвящённые знакомству с новыми типами текстовых задач (задачи на части и задачи на уравнивание).

Материалы для контроля.

Учебное пособие «Тематические тесты»: Тест 4 «Использование свойств действий при вычислениях».

4.1. Свойства сложения и умножения

Методический комментарий

Начиная рассмотрение переместительного и сочетательного свойств сложения и умножения, полезно подчеркнуть, что они не только хорошо известны учащимся, но и постоянно используются в вычислениях. Так, вычисляя устно сумму $36 + 14$, мы фактически находим значение выражения $36 + (4 + 10)$, которое подсчитывается в два этапа: $36 + 4 = 40$ и $40 + 10 = 50$. Иными словами, мы пользуемся сочетательным свойством, выражающим правило прибавления к числу суммы: $36 + (4 + 10) = (36 + 4) + 10$.

Другой пример. В таблице умножения в столбике, где приводятся результаты умножения на 3, есть равенство $5 \cdot 3 = 15$. Однако в столбце, где даны результаты умножения на 5, нет произведения $3 \cdot 5$. И это естественно, так как $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$.

В учебнике даются следствия из переместительного и сочетательного свойств — обобщённые правила, согласно которым компоненты суммы и произведения можно произвольным образом переставлять и объединять в группы. Эти правила служат практической основой выполнения преобразований числовых выражений. Их формулировки учащиеся должны выучить наизусть.

Чтобы учащиеся лучше усвоили правила, можно предлагать упражнения такого типа:

1) Запишите разными способами, используя скобки, сумму чисел 57, 49 и 43. Какой из способов удобнее для вычисления?

2) Запишите разными способами произведение чисел 4, 31 и 25. В каком случае легче подсчитать значение произведения?

Учащиеся должны понять, что, применяя свойства, мы изменяем порядок выполнения действий, и в результате этого могут упроститься вычисления. Так, в сумме удобно группировать те слагаемые, при сложении которых получается круглое число. Точно так же в произведении целесообразно объединять в группы те числа, при умножении которых получается число, оканчивающееся нулём. Можно записать в тетрадях и предложить запомнить такую таблицу:

$$5 \cdot 2 = 10,$$
$$25 \cdot 4 = 100,$$
$$125 \cdot 8 = 1000.$$

Зная её, несложно, например, вычислить устно произведение $125 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 4$.

Упражнения данного пункта предполагают применение рациональных приёмов вычислений. В связи с этим необходимо заметить, что умение считать рационально может рассматриваться лишь как желаемый результат изучения данной темы. Обязательным для всех требованием остаётся получение правильного ответа. А выбор способа вычисления — это право ученика.

Комментарий к упражнениям

312. Слагаемые, дающие в сумме круглое число, можно соединить дугами. Переписывать выражения, заключая эти слагаемые в скобки, необязательно.

315. Идея решения раскрывается в примере 3 объяснительного текста, который надо предварительно разобрать.

а) $36 \cdot 25 = 9 \cdot 4 \cdot 25 = 9 \cdot 100 = 900$;

б) $125 \cdot 12 = 5 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 3 = 15 \cdot 100 = 1500$;

в) $75 \cdot 24 = 3 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 6 = 18 \cdot 100 = 1800$;

г) $150 \cdot 42 = 150 \cdot 6 \cdot 7 = 900 \cdot 7 = 6300$.

В упражнениях **320**, **321** используется приём замены числа произведением чисел и обратное преобразование.

320. а) $75 \cdot 14 \cdot 18 = (25 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 9) =$
$= (25 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 7 \cdot 9) = 18\,900$;

б) $16 \cdot 125 \cdot 4 \cdot 35 = (2 \cdot 35) \cdot (125 \cdot 8) \cdot 4 =$
$= 70 \cdot 1000 \cdot 4 = 280\,000$.

321. г) $182 \cdot 66 = 2 \cdot \underline{7} \cdot \underline{13} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underline{11} =$
$= (7 \cdot 11 \cdot 13) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) = 1001 \cdot 12 = 12\,012$.

322. Надо убедиться, что учащиеся понимают, что означает многоточие в записи суммы.

а) Так как это первый пример, то полезно сначала записать сумму полностью, сосчитать число слагаемых, соединить дугами пары чисел, дающих в сумме одно и то же число, выяснить, сколько таких пар.

б) Вначале полезно записать данную сумму, указав в ней явно несколько последних слагаемых:

$$5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 85 + 90 + 95 + 100.$$

Теперь учащимся легче будет увидеть пары чисел, дающих в сумме одно и то же число 105. Всего таких пар 10.

323. а) Легко понять закономерность: $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$ и т. д. В сумме $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$ содержится 50 слагаемых, поэтому она равна 50^2.

4.2. Распределительное свойство

Методический комментарий

Данный вопрос, как правило, вызывает определённые трудности у учащихся. Особенно это относится к применению распределительного свойства для обратного преобразования — вынесения множителя за скобки. Поэтому на данном этапе никаких обязательных требований к усвоению этого материала не предъявляется. Основное его назначение — это приобретение некоторого опыта преобразования числовых выражений на основе распределительного свойства.

Изложение материала в учебнике начинается с рассмотрения уже знакомой учащимся задачи вычисления площади прямоугольника, составленного из двух прямоугольников одинаковой ширины. По условию задачи составляются два различных выражения, значения которых равны. Записывается равенство $(5 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4$. В его левой части — произведение, в правой — сумма. Это равенство можно прочитать словами: произведение суммы $5 + 3$ и числа 4 равно сумме произведений $5 \cdot 4$ и $3 \cdot 4$. Аналогичные равенства можно составить и прочитать при работе с другими задачами, предложенными в учебнике. Затем распределительное свойство формулируется и записывается с помощью букв. Учащимся сообщается, что обычно распределительное свойство читается как правило умножения суммы на число и что оно справедливо для суммы любого числа слагаемых.

Закрепляется рассмотренный материал заданиями из учебника к этому фрагменту (с. 86). Далее обращается внимание на то, что вычитание вместе с умножением также обладает распределительным свойством, и выполняются упражнения **327—329**. В упражнениях **330, 331** выражение со скобками преобразуется путём применения распределительного свойства, и теперь его можно сравнить с другим данным выражением без скобок.

Следующий шаг в изучении данного вопроса — это применение распределительного свойства для преобразования суммы в произведение. Объяснение можно провести, рассмотрев те задачи, при решении которых вводилось распределительное свойство. Только теперь равенство, записанное, например, по условию задачи на нахождение площади прямоугольника, должно выглядеть так: $5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = (5 + 3) \cdot 4$.

В результате мы придём к преобразованию суммы в произведение, которое называется вынесением общего множителя за скобки.

Для выработки умения выполнять это преобразование в прямом, неосложнённом случае можно использовать упражнение **332.** Общие множители обязательно нужно каким-либо способом выделять — подчёркивать, обводить кружком и т. д. Кроме того, нужно приучить учащихся для контроля устно выполнять обратное преобразование: если получилось исходное выражение, то вынесение множителя за скобки выполнено верно.

В учебнике и в дидактических материалах есть ряд трудных упражнений (задания **337** и **338** из учебника). Их целесообразно использовать в работе с сильными учащимися. Заметим, что в заданиях такого рода возможны разные решения. Так, в примере 2 из теоретической части пункта преобразования можно было бы выполнить иначе:

$$46 \cdot 32 + 8 \cdot 16 = 46 \cdot 32 + 4 \cdot 32 = \\ = (46 + 4) \cdot 32 = 50 \cdot 32 = 1600.$$

Приведём несколько дополнительных заданий, предполагающих рациональные способы вычислений:

1) $48 \cdot 32 + 48 \cdot 68 + 52 \cdot 37 + 52 \cdot 63$;
2) $39 \cdot 73 + 39 \cdot 27 + 61 \cdot 15 + 85 \cdot 61$;
3) $(125 + 87) \cdot 8 + 87 \cdot 2$;
4) $(317 + 25) \cdot 4 - 3 \cdot 317$.

Комментарий к упражнениям

335, 336. Разбираются полезные приёмы умножения на 15, на 101. Желательно их рассмотреть в любом классе. В классе с хорошей математической подготовкой предложите учащимся объяснить приёмы умножения на 1001, на 111, на 99.

337. Используются приёмы умножения на 11, на 15.
а) $22 \cdot 26 - 11 \cdot 26 = 26 \cdot 11 = 260 + 26 = 286$;
г) $48 \cdot 11 + 48 \cdot 4 = 48 \cdot 15 = 480 + 240 = 720$.

338. а) $12 \cdot 17 + 17 \cdot 23 + 35 \cdot 13 = (12 + 23) \cdot 17 + 35 \cdot 13 = 35 \cdot 17 + 35 \cdot 13 = 35 \cdot 30 = 1050$.

4.3. Задачи на части

Методический комментарий

Задачи на части, а в следующем пункте и задачи на уравнивание продолжают линию решения текстовых задач арифметическим способом. Не следует стараться обязательно решить сразу все предлагаемые в этих пунктах задачи. Времени может оказаться недостаточно, а спешка повредит конечной цели — развитию мышления, овладению приёмами рассуждений.

Объяснение можно начать с задачи 1 из учебного текста.

Решение задачи можно записать с вопросами:

1) Сколько килограммов ягод приходится на 1 часть?

$$9 : 3 = 3 \text{ (кг)}.$$

2) Сколько килограммов сахара надо взять?

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ (кг)}.$$

Ответ: 6 кг.

Вначале решаются задачи, в которых о частях говорится в явном виде (**342**, **343**). Заметим, что в условии задачи даётся масса не одного из компонентов, а всей смеси, сплава и т. д.

После этого решаются задачи, в которых известно, на сколько масса одной составляющей смеси больше массы другой составляющей (задача **345**). И затем, после рассмотрения задачи 2 из учебного текста, решаются задачи, в которых части в явном виде не указаны, а говорится лишь, во сколько раз одна величина больше или меньше другой (**347**, **348** и др.).

Комментарий к упражнениям

Условия задач необходимо иллюстрировать схематическими рисунками, которые позволяют проводить рассуждения на наглядной основе. Без рисунков этот тип задач многим учащимся окажется просто непосильным.

345. По условию задачи делается рисунок (рис. 4.8 в учебнике), на котором надо отметить отрезок, изображающий 36 ц. Теперь можно решать задачу: 36 ц составляют 2 части, значит, на одну часть приходится $36 : 2 = 18$ (ц); ржи смололи $18 \cdot 4 = 72$ (ц).

346. Выделяется подзадача: взяли 5 частей груш и 3 части слив, что составило вместе 2 кг 400 г (рис 13).

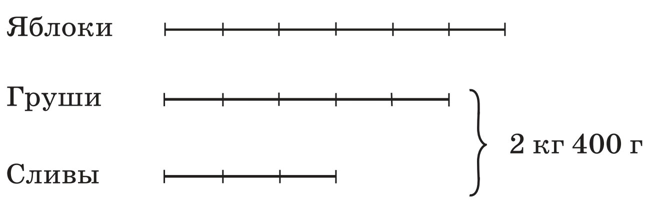


Рис. 13

349. а) Задачу нужно переформулировать: мальчик сорвал орехов в 2 раза больше, чем девочка.

350. а) После явного введения частей и выполнения рисунка задача становится такой же, как задача **345**.

351. а) Сначала надо «исключить» третий день, т. е. узнать, сколько страниц Митя прочитал за два дня. После этого получается уже хорошо знакомая задача на части, которая решается с опорой на рисунок.

б) «Исключив» первый кусок ткани, получаем задачу: «Кусок ткани длиной 51 м разрезан на две части, одна из которых в 2 раза короче другой. Какова длина каждой части?»

352. Решение понятно из рисунка 14.

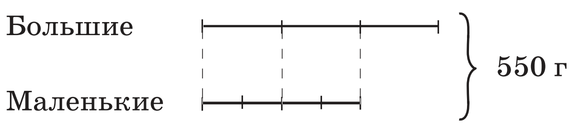


Рис. 14

354. б) Сначала переформулируем условие так: «У Васи в 3 раза больше марок, чем у Серёжи, а у Андрея — в 2 раза больше марок, чем у Васи». Это условие изображаем в виде схемы (рис. 15), причём начинаем с изображения количества марок у Серёжи (это одна часть). Далее на рисунке нужно найти отрезок, составляющий 80 марок.

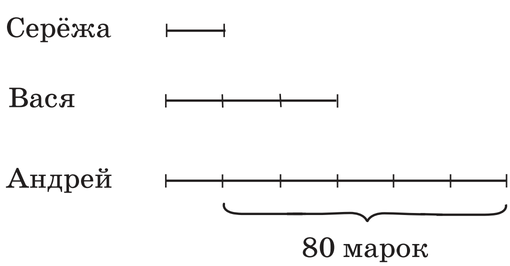


Рис. 15

4.4. Задачи на уравнивание

Методический комментарий

Здесь рассматриваются задачи указанного вида, в которых известны сумма двух величин и их разность. Более сложные задачи на уравнивание разбираются в курсе 6 класса.

Для того чтобы облегчить учащимся овладение самой идеей уравнивания, целесообразно организовать реальную деятельность по уравниванию величин, рассматриваемых в условии задачи.

Так, если объяснение проводить на задаче, разобранной в учебнике, то нужно положить на стол две пачки тетрадей и затем сообщить учащимся условие задачи. Задача решается устно, причём решение сопровождается реальными действиями с тетрадями. После этого решение можно записать на доске с комментарием. Запись может быть такой:

1) $70 - 10 = 60$ (тетр.) — столько тетрадей будет в двух пачках, если убрать 10 тетрадей;

2) $60 : 2 = 30$ (тетр.) — столько тетрадей во второй пачке;

3) $30 + 10 = 40$ (тетр.) — столько тетрадей в первой пачке.

Эту же задачу целесообразно решать иначе, предложив другие приёмы уравнивания тетрадей в пачке. (Каждый из рассматриваемых способов также должен сопровождаться реальными действиями с тетрадями.) Так, можно уравнять пачки, добавив во вторую 10 тетрадей, а можно уравнять число тетрадей в пачках, переложив половину разницы (5 тетрадей) во вторую пачку. При любом способе решения учащиеся должны привыкнуть для самоконтроля проводить проверку (см. текст учебника). Она может выполняться устно. Таким же способом учитель должен опровергать неверные решения.

Вначале решаются задачи **359—361**. Решение одной из более сложных задач на уравнивание (задача **362**) сначала разбирается фронтально по учебнику, а затем две похожие задачи предлагаются учащимся для решения рассмотренным способом. Задачи **364—368** — трудные, в слабом классе их лучше не рассматривать.

Комментарий к упражнениям

359—361. Решение первых задач полезно проводить с привлечением каких-либо реальных предметов (необязательно тех, о которых идёт речь в задаче, например, спичек). Затем можно перейти к схематическим рисункам, где величины, о которых идёт речь в задаче, изображаются отрезками.

363. а) Пусть оба числа равны меньшему из них, тогда их сумма будет 432 – 18 = 414 (рис. 16). Меньшее число равно 414 : 2 = 207, а большее число равно 207 + 18 = 225. (Задачу полезно решить и другим способом.)

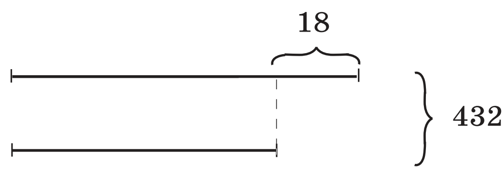


Рис. 16

364. Задача существенно сложнее предыдущей, так как вместо уже привычной ситуации — «одно число больше (меньше) другого на ...» — дана разность чисел. Итогом решения этой задачи может быть, вообще говоря, такой вывод: чтобы найти два числа по их сумме и разности, можно из суммы вычесть разность; в результате получится удвоенное меньшее число. Конечно, это следует делать только в хорошо подготовленном классе.

366. а) Последовательные натуральные числа отличаются друг от друга на единицу. Условие задачи можно проиллюстрировать с помощью рисунка 17. Решение может быть таким: будем считать, что слагаемые равны меньшему числу, тогда их сумма будет 48 – 3 = 45; меньшее число равно 45 : 3 = 15, а два других — это 15 + 1 = 16 и 16 + 1 = 17. (Проверьте: числа 15, 16 и 17 — это последовательные натуральные числа и 15 + 16 + 17 = 48.)

Рис. 17

368. Если бы отцу было столько же лет, сколько матери, то сумма возрастов была бы равна 103 – 5 = 98 годам.

Далее имеем задачу на части. Здесь удобно возраст матери принять за 20 частей, тогда на возраст сына приходится 20 : 4 = 5 частей, а на возраст дочери — 20 : 5 = 4 части.

Запись решения:

1) 20 + 20 + 5 + 4 = 49 — столько частей приходится на суммарный возраст;

2) 98 : 49 = 2 — столько лет приходится на 1 часть;

3) 2 · 20 = 40 — столько лет матери;

4) 40 + 5 = 45 — столько лет отцу;

5) 2 · 5 = 10 — столько лет сыну;

6) 2 · 4 = 8 — столько лет дочери.

Глава 5. Углы и многоугольники (9 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	**Число уроков**	**Рабочая тетрадь, номер задания**	**Дидактические материалы**	**Характеристика основных видов деятельности учащихся**
5.1. Как обозначают и сравнивают углы	2	152—158 (ч. 1)		**Распознавать** на чертежах, рисунках и моделях углы. **Распознавать** прямой, развёрнутый, острый, тупой углы. **Изображать** углы от руки и с использованием чертёжных инструментов на нелинованной и клетчатой бумаге, **моделировать** из бумаги и других материалов. **Распознавать, моделировать** биссектрису угла
5.2. Измерение углов	3	159—173 (ч. 1)	П-18	**Распознавать** на чертежах, рисунках и моделях прямые, острые, тупые и развёрнутые углы. **Измерять** с помощью транспортира и **сравнивать** величины углов. **Строить** углы заданной величины с помощью транспортира. **Решать** задачи на нахождение градусной меры углов
5.3. Ломаные и многоугольники	2	174—185 (ч. 1)		**Распознавать** многоугольники на чертежах, рисунках, находить их аналоги в окружающем мире. **Моделировать** многоугольники, используя бумагу, проволоку и т. д., **изображать** на нелинованной и клетчатой бумаге. **Измерять** длины сторон и величины углов многоугольников. **Проводить** диагонали много-

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
				угольников. **Использовать терминологию**, связанную с многоугольниками. **Конструировать алгоритм** воспроизведения рисунков, построенных из многоугольников, **строить по алгоритму**, **осуществлять самоконтроль**, проверяя соответствие полученного изображения заданному рисунку. **Вычислять** периметры многоугольников
Обзор и контроль	2	**Моделировать** многоугольники, используя бумагу, проволоку и т. д., **изображать** на нелинованной и клетчатой бумаге. **Распознавать** прямые, острые, тупые углы многоугольников. **Измерять** длины сторон и величины углов многоугольников. **Изображать** многоугольники. **Разбивать** многоугольник и **составлять** многоугольник из заданных многоугольников. **Определять число** диагоналей многоугольника. **Использовать терминологию**, связанную с многоугольниками. **Конструировать алгоритм** воспроизведения рисунков, построенных из многоугольников, **строить по алгоритму**, **осуществлять самоконтроль**, проверяя соответствие полученного изображения заданному рисунку. **Выдвигать гипотезы** о свойствах многоугольников и **обосновывать** их. **Вычислять** периметры многоугольников		

Основные цели: познакомить учащихся с новой геометрической фигурой — углом; ввести понятие биссектрисы угла; научить распознавать острые, тупые и прямые углы, строить и измерять углы с помощью транспортира, оценивать величину угла на глаз; развить представление о многоугольнике.

Обзор главы. Материал данной главы содержит два смысловых блока.

Первый из них связан с введением новой для учащихся геометрической фигуры, которой является угол, и связанных с ней понятий (виды углов, измерение углов). Учащиеся учатся изображать углы, обозначать их, распознавать в различных положениях. Одним из важнейших умений, которым они должны овладеть на этой стадии обучения, является сравнение углов. Формируется это умение на основе практического действия — наложения углов друг на друга. Классификация углов проводится через сравнение с наиболее часто встречающимся в окружающем мире прямым углом: угол, меньший прямого, является острым, больший прямого, — тупым. Измерение углов является для учащихся новым видом измерений, который знакомит их с угловой мерой и новым измерительным прибором — транспортиром.

Второй блок содержания связан с многоугольниками и содержит материал, частично знакомый учащимся из начальной школы. Теперь им предстоит расширить свои представления об уже знакомых фигурах, усвоить связанную с ними терминологию (вершина, сторона, угол многоугольника, диагональ), научиться «видеть» их в более сложных конфигурациях. Отрезок и угол здесь — элементы многоугольника. Учащиеся учатся изображать многоугольники с заданными свойствами на нелинованной и клетчатой бумаге, обозначать их, находить периметр.

Заметим, что в учебнике мы рассматриваем углы, меньшие развёрнутого. Однако угол многоугольника может быть и больше развёрнутого (невыпуклые многоугольники). Внимание учащихся на этом не акцентируется, так как невыпуклые многоугольники встречаются на рисунках лишь для создания более полного представления о многоугольниках, но никакая практическая работа с ними не проводится.

Материалы для контроля.

Учебное пособие «Контрольные работы»: Контрольная работа № 3 «Использование свойств действий при вычислениях. Углы и многоугольники».

Учебное пособие «Тематические тесты»: Тест 5 «Углы и многоугольники».

5.1. Как обозначают и сравнивают углы

Методический комментарий

Угол для учащихся новая и весьма специфическая фигура, измерение углов осваивается ими со значительно большими трудностями, чем измерение длин. Это связано с тем, что в их практическом, жизненном опыте интуитивные представления об угле как о геометрической фигуре и об измерении углов практически отсутствуют. Для того чтобы школьники «освоились» с этой фигурой, требуется определённое время. Поэтому упражнения, аналогичные тем, которые даются в данной главе, следует «вкрапливать» в последующие уроки.

Важным результатом изучения данного пункта является умение сравнить два угла (на глаз, наложением, используя кальку или углы, вырезанные из бумаги). При этом может выясниться, что ученик не овладел самим понятием угла. Это становится очевидным в том случае, если ученик утверждает, что угол A больше угла B, так как у него «стороны длиннее». Очевидно, что, не преодолев эту трудность, нет смысла переходить к измерению углов. Помочь в этом случае может использование различных моделей.

Умение увидеть прямой угол в различных положениях и конфигурациях, построить, используя угольник или клетчатую бумагу, является весьма важным, так как это в определённом смысле опорное понятие (острый угол и тупой угол вводятся как углы соответственно меньший и больший прямого). Следует обращать внимание на то, чтобы учащиеся строили углы в различных положениях.

Используя клетчатую бумагу, легко построить прямой угол, когда вершина угла лежит в узле сетки, а стороны угла идут по линиям сетки. Если позволяет время, можно показать более сильным учащимся, как построить угол и в ином положении. Пусть точка O — вершина угла, а сторона угла проходит через точку сетки, расположенную от вершины на две клетки вправо и одну вверх. С помощью угольника проведём другую сторону угла. Учащиеся должны увидеть, что она проходит через точку, расположенную от вершины на одну клетку влево и две вверх (рис. 18).

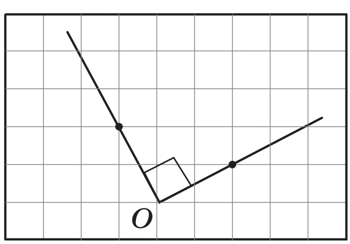


Рис. 18

Проведём сторону второго угла через точку сетки, расположенную от вершины на одну клетку вправо и три клетки вверх. Другая сторона прямого угла пройдёт через точку, расположенную от вершины на три клетки влево и одну клетку вверх. Подметив закономерность, учащиеся могут сами отметить пару точек, ей удовлетворяющих (например, четыре вправо и пять вверх — пять влево и четыре вверх), и проверить с помощью угольника, является ли построенный по этим точкам угол прямым.

Комментарий к упражнениям

372. Учащиеся должны перенести угол A на кальку и наложить его на другие углы.

373. Чертёж можно сделать на кальке и сравнить углы, перегнув лист по прямой OB.

380. Сравнить углы AOC и BOD можно так. Пары углов AOD и DOB, AOC и COB составляют развёрнутый угол. Так как угол AOD больше угла COB, то угол, дополняющий угол AOD до развёрнутого, должен быть меньше, чем угол, дополняющий угол COB до развёрнутого. Значит, угол DOB меньше угла AOC.

381. 2) На основании решения первой задачи этого упражнения часть учащихся может догадаться, что, для того чтобы угол ABC был прямым, нужно провести диаметр AC. Другие же увидят, что AC — диаметр окружности, после построения прямого угла с помощью угольника.

5.2. Измерение углов

Методический комментарий

Ещё одна трудность, возникающая при измерении углов, связана со знакомством с новым измерительным инструментом — транспортиром. В течение трёх лет обучения в начальной школе учащимся была известна только одна шкала — шкала линейки. Поэтому, чтобы избежать связанных с этим ошибок, полезно провести сравнение шкалы транспортира со шкалой линейки, обращая внимание на их сходство и различия: цена меньшего деления на линейке — 1 мм, на транспортире — $1°$, большее деление на линейке — 10 мм (1 см), на транспортире — $10°$.

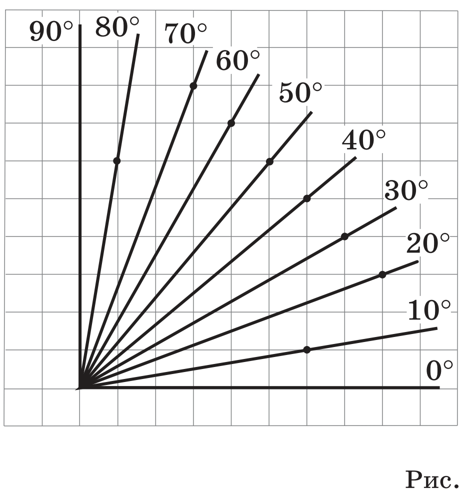
В качестве самых первых упражнений на измерение и построение углов должны быть использованы задания из рабочей тетради, где часть действий уже выполнена — «транспортир» приложен необходимым образом. Для некоторых учащихся число таких упражнений может быть увеличено; можно предложить учащимся скопировать транспортир на лист бумаги, а полученное изображение использовать при дальнейшей работе.

Обращаем внимание учителя на то, что задания на построение углов даны в рабочей тетради, так как строить углы целесообразнее на нелинованной бумаге. Клетчатую бумагу можно использовать там, где необходимо строить углы в 90°, 45°, 135°. Уметь строить прямой угол на гладкой бумаге учащиеся должны с помощью как транспортира, так и угольника.

Продолжается работа, направленная на развитие глазомера: учащимся предлагаются упражнения, где требуется приближённо оценить величину угла. С этой же целью полезно добавить упражнения типа: «Постройте без помощи транспортира углы, равные 30°, 40°, 80°, 100°». Задание может выполняться как на нелинованной, так и на клетчатой бумаге.

Для того чтобы учащиеся могли по клеткам приближённо строить углы в 10° 20°, ..., 80°, можно провести следующую *практическую работу*.

1) Построить с помощью транспортира углы, равные 10°, 20°, ..., 90° с вершиной в узле сетки (рис. 19) и общей стороной, идущей по горизонтальной линии сетки.



	→	↑
10°	6	1
20°	8	3
30°	7	4
40°	6	5
50°	5	6
60°	4	7
70°	3	8
80°	1	6

Рис. 19

2) Отметить ближайший узел сетки, через который прошла другая сторона каждого угла.

3) Определить «путь» из вершины угла в отмеченную точку и занести его в таблицу.

4) Сравнить данные таблицы для углов $10°$ и $80°$, $20°$ и $70°$ и т. д.

5) По данным таблицы построить угол, приближённо равный, например, $30°$.

В качестве *дополнительных упражнений* можно предложить учащимся задачи на уравнивание с геометрической фабулой. Например, можно дать такую задачу: «Сумма двух углов равна $120°$, а один угол больше другого на $20°$. Чему равен каждый угол? Начертите эти углы».

Комментарий к упражнениям

399. 1) Начать можно с практических построений. По ходу построений учащиеся догадаются, что три угла по $60°$ составят один развёрнутый угол и ещё три угла — другой развёрнутый угол, т. е. полный круг равен $360°$.

2) Четыре луча, проведённые из одной точки под углом $90°$, делят плоскость на четыре прямых угла. Следовательно, чтобы все углы были острыми, достаточно провести пять лучей (рис. 20).

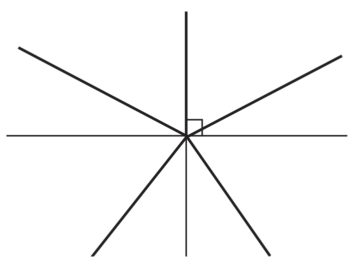


Рис. 20

В рабочей тетради есть задание, в котором требуется разделить окружность на 6 равных дуг. Начать его выполнение можно так. Проведя диаметр окружности, разделим её на две равные части, после чего уже с помощью транспортира каждую полуокружность разделим на три равные части. Здесь можно обратить внимание учащихся на тот факт, что круг равен $360°$.

Если выполнение этого упражнения отложить до изучения следующего пункта, то можно расширить задание и попросить учащихся последовательно соединить точки деления отрезками. Таким образом они построят шестиугольник, все стороны и все углы которого равны. (Термин «правильные многоугольники» вводится в 6 классе.) Аналогичным образом, разделив окружность на три, на четыре части, они могут построить равносторонний треугольник, квадрат.

5.3. Ломаные и многоугольники

Методический комментарий

Расширение представлений учащихся о многоугольниках происходит через знакомство с элементами многоугольников и с понятиями диагонали и периметра многоугольника. Учащиеся учатся воспринимать геометрическую фигуру не как единое целое, а как объект, состоящий из определённых элементов, учатся видеть фигуры, образующиеся при её разбиении (см., например, упражнение **412**).

Важно научить их приёмам, позволяющим облегчить задачу восприятия, особенно в случаях сложных конфигураций. Это и использование графических приёмов: раскрашивание одной или нескольких фигур, входящих в данную конфигурацию, обведение контуров отдельных фигур, использование при этом цвета. Это и поиск равных фигур и элементов, поиск симметрии. Это и определённая логика перебора, позволяющая вычленить, увидеть все требуемые фигуры и одновременно доказать отсутствие других фигур.

Определённое внимание уделяется понятию периметра многоугольника. Заметим, что этот термин может оказаться для учащихся новым. Периметр многоугольника здесь определяется как длина границы. При таком подходе облегчается создание опорного зрительного образа, соответствующего данному понятию. Этому будет способствовать разъяснение происхождения термина «периметр» («измеряю вокруг»), а также практические измерения (длины границы фигуры, вычерченной на бумаге; длины ограды земельного участка), сгибание из проволоки различных фигур с одинаковым периметром и др.

Здесь необходимо также продолжать формирование умения измерять углы и строить углы заданной величины.

Комментарий к упражнениям

415. Задача трудная, однако её целесообразно рассмотреть и в слабом классе, упростив условие.

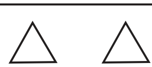
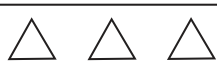
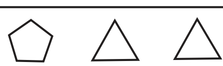
Сначала следует внимательно рассмотреть рисунок: увидеть большой пятиугольник, «звезду», маленький пятиугольник, различные треугольники. Можно предложить учащимся найти какой-нибудь треугольник, равный треугольнику AOB (такой же, как треугольник AOB), треугольнику ABC и др., назвать хотя бы один треугольник со стороной AB, несколько треугольников с вершиной B. Чтобы облегчить выполнение этого задания, можно, скопировав рисунок на лист бумаги, раскрасить карандашами двух цветов маленькие треугольники разных видов. Учащимся значительно проще будет увидеть треугольник, составленный, например, из красного и синего треугольников, из двух красных и одного синего треугольника и т. д.

Чтобы найти все 35 треугольников, предлагается следующая логика перебора. Пятиугольник разбит на треугольники двух видов и пятиугольник. Будем составлять треугольники из различных комбинаций этих трёх фигур. Чтобы при подсчёте не потерять ни один из треугольников, важно выбрать направление обхода, например по часовой стрелке. Началом обхода будем считать вершину B.

Подсчитаем число маленьких треугольников, равных, например, треугольнику ABO и треугольнику OBF. Тех и других будет по 5. Далее рассмотрим треугольник ABF, составленный из треугольников ABO и OBF, и подсчитаем такие треугольники. Их всего 10 (по два у каждой вершины). Треугольник ABC составлен из трёх треугольников — ABO, OBF и FBC. Таких треугольников тоже 5. Понятно, что никакие четыре, пять и т. д. маленьких треугольников новые треугольники не образуют.

Теперь рассмотрим маленький пятиугольник. Присоединение к нему одного из маленьких треугольников треугольника не даёт. Присоединив же к нему, например, треугольники AOK и FCG, получим треугольник ACH. Число треугольников такого вида равно числу вершин маленького пятиугольника — 5. И наконец, подсчитаем число треугольников типа BDE, составленных из пятиугольника и четырёх треугольников. Снова обойдём все вершины пятиугольника, начиная с вершины B, и получим ещё 5 треугольников. Итого 35 треугольников.

По ходу решения можно заполнить таблицу:

Фигуры	**Пример треугольника**	**Число треугольников**
	ABO и OBF	$5 + 5 = 10$
	ABF	10
	ABC	5
	ACH	5
	BDE	5

Несколько комментариев к заданиям из рабочей тетради.

В рабочей тетради есть задание, в котором требуется измерить величины углов треугольников. Не следует торопить события и сообщать учащимся, что сумма углов треугольника равна 180° — упражнение такой цели не преследует. Этому факту будет посвящён отдельный пункт в 6 классе. Здесь же отрабатываются простейшие умения: видеть углы треугольника, уметь их измерять, записывать величину угла.

Обращаем внимание на то, что если в задании требуется найти середину отрезка, то учащиеся находят её с помощью линейки.

Чтобы определить, от какого из треугольников «оторван» угол, нужно дорисовать «оторванные» треугольники и измерить их величины.

Вполне возможно, что у некоторых учащихся уже сложился образ выпуклого четырёхугольника с проведённой в нём диагональю, которая и делит его на два треугольника. Но, скорее всего, таких учащихся окажется немного, поэтому искать решение задач о разбиении четырёхугольника нужно практически. Пусть сначала учащиеся проведут прямую, проходящую через две противоположные стороны четырёхугольника. Они получат два четырёхугольника. Затем эту прямую можно «развернуть» и провести через сторону и вершину треугольника. В этом случае получатся треугольник и четырёхугольник. Если прямую провести через две соседние стороны четырёхугольника, то получатся треугольник и пятиугольник, что явно дальше от нужного решения. Таким образом, становится очевидным, что прямая должна проходить через две вершины четырёхугольника.

Решение задачи о разбиении невыпуклого четырёхугольника изображено на рисунке 21.

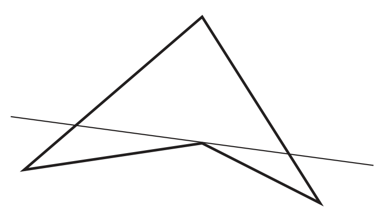


Рис. 21

Глава 6. Делимость чисел (15 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
6.1. Делители и кратные	3	186—193 (ч. 2)	О-23, П-19	**Формулировать** определения понятий «делитель» и «кратное» числа, **употреблять** их в речи. **Находить** делители и кратные данных чисел, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух чисел, **использовать** соответствующие обозначения. **Анализировать** ряды кратных. **Решать** текстовые задачи, связанные с делимостью чисел
6.2. Простые и составные числа	2	194—197 (ч. 2)	О-24	**Формулировать** определения простого и составного числа, иллюстрировать их примерами. **Выполнять** разложение числа на простые множители. **Использовать** математическую терминологию для объяснения, верно или неверно утверждение. **Находить** простые числа с помощью «решета Эратосфена». **Выяснять**, является ли число составным. **Использовать** в ходе решения задач таблицу простых чисел
6.3. Свойства делимости	2	—	—	**Формулировать** свойства делимости суммы и произведения, **рассуждать**, обращаясь к соответствующим формулировкам. **Конструировать** математиче-

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
				ские утверждения с помощью связки «если…, то…». **Использовать** термин «контрпример», **опровергать** утверждение общего характера с помощью контрпримера
6.4. Признаки делимости	3	198—200 (ч. 2)	О-25, П-20	**Формулировать** рассмотренные признаки делимости. **Приводить** примеры чисел, делящихся и не делящихся на указанное число, **давать** развёрнутые **пояснения. Конструировать** математические утверждения с помощью связок «если…, то…», «тогда и только тогда». **Применять** признаки делимости в рассуждениях. **Доказывать** и **опровергать** утверждения
6.5. Деление с остатком	3	201—205 (ч. 2)	О-26, «Проверь себя»	**Выполнять** деление с остатком при решении текстовых задач и **интерпретировать** ответ в соответствии с поставленным вопросом. **Классифицировать** натуральные числа по остаткам от деления
Обзор и контроль	2	**Применять** понятия, связанные с делимостью натуральных чисел. **Использовать** свойства и признаки делимости. **Опровергать** с помощью контрпримеров утверждения о делимости чисел. **Решать** задачи на деление с остатком		

Основные цели: сформировать у учащихся базовые знания, относящиеся к вопросу делимости натуральных чисел (понятие делителя и кратного, простого и составного числа, разложение на простые множители, деление с остатком), познакомить со свойствами и признаками делимости.

Обзор главы. Эта глава — завершающий этап в изучении натуральных чисел. Здесь рассматриваются элементарные понятия теории делимости. От предыдущих глав этот материал отличается тем, что он содержит значительный объём теоретических сведений, их освоение представляет для учащихся определённые трудности. В то же время у учащихся появляется хорошая возможность приобрести опыт проведения несложных доказательных рассуждений. Многие проблемы математики на протяжении всей её истории связаны с делимостью натуральных чисел, с простыми и составными числами. И для учащихся учение о делимости чисел — неисчерпаемое поле для математических исследований, которые веками привлекали больших учёных. Здесь естественным образом возникают задачи, которые по своему содержанию, по постановке вопроса понятны даже младшим школьникам. Некоторые из них, естественно в адаптированном виде, представлены в практической части данной главы.

Материалы для контроля.
Учебное пособие «Тематические тесты»: Тест 6 «Делимость чисел».

6.1. Делители и кратные

Методический комментарий

Пункт начинается с определения операции деления. Это определение известно учащимся с начальной школы, они возвращались к нему и в курсе 5 класса. Теперь это определение выступает как основа, как стержень теоретической части главы «Делимость чисел». Оно даётся в формулировке, разъясняющей смысл оборота речи «число a делится на число b».

На базе этого определения вводятся два взаимосвязанных понятия — «делитель» и «кратное». Учащиеся должны научиться трактовать числовые равенства вида $a = b \cdot c$, где a, b, c — натуральные числа, с использованием указанных терминов. Например, из равенства $30 = 5 \cdot 6$ следует, что число 5 — делитель 30, а число 30 — кратное 5 (такие же утверждения можно сформулировать по отношению к паре чисел 6 и 30). Учащиеся должны также уметь проверять, является ли одно из двух чисел делителем (кратным) другого. На отработку этих умений направлены упражнения **419—421**, а в начале объяснительного текста содержатся образцы соответствующих рассуждений (число 18 делится на 3, так как $18 = 3 \cdot 6$; число 18 не делится на 4, так как $4 \cdot 4 < 18$, а $4 \cdot 5 > 18$).

Далее в ходе рассмотрения примеров вводится ещё ряд новых терминов: общий делитель, наибольший общий делитель, общее кратное, наименьшее общее кратное. Они появляются естественным образом, как слова русского языка, без каких-либо специальных определений. Поэтому учащимся не должны предлагаться вопросы типа: «Что называется наибольшим общим делителем чисел a и b?» В то же время обозначения НОД и НОК учащиеся должны знать, понимать и уметь использовать в своих записях.

Остановимся на вопросе нахождения НОД и НОК. Прежде всего отметим, что в курсе не предусмотрено рассмотрение известных алгоритмов нахождения НОД и НОК с помощью разложения чисел на простые множители. Во-первых, эти алгоритмы сложны и недоступны для пятиклассников, во-вторых, техническая составляющая современного общеобразовательного курса математики не требует столь продвинутых навыков. Поэтому для нахождения наименьшего общего кратного двух чисел предлагается следующий простой алгоритм, основанный на формируемых в данном пункте базовых знаниях и умениях: выписывается ряд чисел, кратных большему числу; первое число в этом ряду, которое делится и на второе из данных чисел, будет их наименьшим общим кратным. Так как в заданиях предлагаются, как правило, небольшие числа (см. упражнения **434, 435**), то перебор заканчивается быстро. Умение находить наименьшее общее кратное совершенствуется в ходе изучения темы «Дроби» при приведении дробей к наименьшему общему знаменателю. Там уже рассматриваются и фиксируются в сознании учащихся разные случаи нахождения НОК (одно из чисел кратно другому и т. д.).

Что касается нахождения НОД пары чисел, то соответствующее умение не является столь актуальным для дальнейшего изучения курса. В связи с этим такие упражнения, как **425** и **426**, направлены не столько на выработку такого умения, сколько на осознание самого понятия. В то же время умение найти с помощью перебора все делители данного числа является существенным. Подобного рода задания предлагаются, как правило, для небольших чисел; их выполнение базируется на знании таблицы умножения (см. упражнения **422** и **423**).

В систему упражнений пункта включены несколько сюжетных задач (см. упражнения **427, 428, 436, 437, 440—442**), математическая сущность которых состоит в нахождении общих делителей или общих кратных, указанных в условии чисел. Важно, чтобы учащиеся осознали связь содержания задачи с изучаемыми понятиями, увидели возможность их применения в практических ситуациях.

Комментарий к упражнениям

422. Удобно выписать делители парами, а потом уже их упорядочить.

423. Нужно найти все делители и потом ответить на вопрос задачи.

424. а) Решение сводится к нахождению всех делителей числа 36, отличных от 1 и самого этого числа. Так как делителями числа 36 являются числа 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, то количество одинаковых порций, на которые можно разделить 36 конфет, равно 2, 3, ..., 18. Всего 7 способов.

Дополнительный вопрос: сколько конфет будет в одной порции при каждом способе деления? (Если умозрительно детям рассуждать трудно, то можно раскладывать реальные конфеты.)

б) Сначала нужно найти все возможные способы деления 24 учеников на одинаковые группы (см. задачу «а»)).

427. 18 синих палочек можно разложить на 2, 3, 6 и 9 одинаковых кучек; 12 жёлтых палочек можно разделить на 2, 3, 4 и 6 одинаковых кучек. Чтобы разложить все палочки в одинаковые кучки, в которых будут и синие, и жёлтые палочки, есть всего три способа: 2 кучки (по 9 синих и 6 жёлтых палочек), 3 кучки (по 6 синих и 4 жёлтых палочки), 6 кучек (по 3 синих и 2 жёлтых палочки). Задача свелась к нахождению общих делителей чисел 18 и 12. (Обязательно надо либо разложить реальные палочки, либо сделать рисунок.)

429—432. Перед выполнением этих заданий надо внимательно разобрать в учебнике фрагмент, связанный с построением и обсуждением особенностей ряда чисел, кратных 10 (см. с. 112).

431. Надо двигаться от числа 70 влево и вправо, отнимая и прибавляя 14. Получим такой ряд кратных: 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140.

432. Задача, по своей сути «обратная» по отношению к упражнению **430.** Так как $60 : 12 = 5$, то это ряд кратных числа 5. Далее: $5 \cdot 1 = 5$, $5 \cdot 6 = 30$, $5 \cdot 20 = 100$.

436. При счёте тройками называют числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ... При счёте пятёрками называют числа 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ... Числа 15, 30, ... называют и когда считают тройками, и когда считают пятёрками. Но Маша задумала число, меньшее 30, т. е. число 15.

437. Общее число яиц должно делиться и на 10, и на 12. Можно выписать все такие числа, большие 100 и меньшие 150.

На 10 делятся числа 110, 120, 130, 140. На 12 делятся числа 108, 120, 132, 144. Значит, это число 120.

440. Первый автобус приходит на конечную остановку через 30 мин, 60 мин, 90 мин, 120 мин, 150 мин и т. д. Второй автобус приходит на конечную остановку через 40 мин, 80 мин, 120 мин, 160 мин и т. д. Первое совпадение времени — через 120 мин.

После того как задача будет решена перебором, следует обратить внимание учащихся на то, что фактически нам пришлось искать наименьшее число, которое делится и на 30, и на 40, т. е. НОК (30, 40).

441. Задача также может быть решена перебором. Однако в техническом отношении он сложнее, чем в предыдущей задаче. Поэтому проведём такое рассуждение.

Расстояние, на котором будет замечено первое совпадение следов, — это наименьшее число, которое делится и на 50, и на 60, т. е. это 300 см. Это расстояние укладывается в 141 м 47 раз.

442. Три автобуса окажутся на остановке через 30 мин, т. е. в 9 ч 15 мин. Два автобуса окажутся на остановке одновременно первый раз через 6 мин, т. е. в 8 ч 51 мин.

6.2. Простые и составные числа

Методический комментарий

В результате изучения пункта учащиеся должны знать определения простого и составного числа и владеть кругом элементарных представлений о простых числах (наименьшее простое число — это 2, простых чисел бесконечно много, существуют специальные таблицы простых чисел); знать простые числа в пределах нескольких первых десятков; распознавать двузначные и трёхзначные простые числа, прибегая при необходимости к помощи таблицы; раскладывать составное число на простые множители (формирование последнего умения будет продолжено при изучении признаков делимости, где учащиеся познакомятся с удобным приёмом разложения числа на простые множители).

В содержании пункта предусмотрен небольшой исторический экскурс — знакомство с «решетом Эратосфена». Желательно, чтобы это знакомство прошло в активной форме, т. е. чтобы ученики выполнили по шагам процедуру, описанную в учебнике. Можно также дополнительно сообщить, что по мере продвижения в область больших чисел простые числа встречаются всё реже, но наибольшего простого числа нет. Если будет рассматриваться упражнение **454**, в котором речь идёт о числах-близнецах, то можно добавить, что известны весьма большие «близнецы» (например, 10 006 427 и 10 006 429). Существует гипотеза, согласно которой среди простых чисел имеется бесконечно много пар «близнецов».

Комментарий к упражнениям

449. Надо показать, что число можно разложить на множители, каждый из которых отличен от 1.

450. 3) Нет, не всегда. Простых чисел нет в последовательности чисел, оканчивающихся цифрой 2, 4, 5, 6, 8. Если простые числа есть, то их несколько.

452—454. Выполняются путём рассмотрения и анализа таблицы простых чисел.

456. При записи разложений нужно использовать степени. Решение может выглядеть так: $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$; $6 = 2 \cdot 3$; $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$; $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$ и т. д.

457. Запись решения пятиклассниками, которые ещё не знают свойства степени, может выглядеть так: $10 = 2 \cdot 5$; $100 = 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$ и т. д.

459. $c = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \times 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$. Теперь посчитаем, сколько в разложении двоек, сколько троек, сколько пятёрок и запишем результат с помощью степеней. Получим $c = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.

461. 2) Каждое из чисел 6, 10 и 21 есть произведение двух простых чисел. Таким же свойством обладают, например, числа $2 \cdot 11 = 22$, $3 \cdot 5 = 15$, $7 \cdot 5 = 35$. Каждое такое число имеет 4 делителя. Например, делителями числа 15 являются 1, 3, 5 и 15.

3) 4 делителя: 1, a, b и $a \cdot b$.

6.3. Свойства делимости

Методический комментарий

В пункте рассматриваются свойства делимости произведения и суммы. Их обоснование проводится путём рассмотрения доказательных примеров, которые, однако, носят общий характер. К восприятию идеи доказательства учащиеся подготовлены изучением предыдущего материала: чтобы показать, что значение рассматриваемого числового выражения (произведение или суммы) делится на некоторое число a, это выражение нужно представить в виде произведения, в котором один из множителей равен a. Поэтому приведённые в учебнике рассуждения должны быть доступны детям. Тем не менее рекомендуем их разбирать в ходе фронтальной работы учителя с классом, не требуя в дальнейшем от учащихся их воспроизведения.

Упражнения к пункту подобраны таким образом, что учащимся для обоснования всегда достаточно сослаться на соответствующее свойство. Формулировки свойств должны быть многократно проговорены вслух (или прочитаны по учебнику), это будет способствовать их постепенному запоминанию.

В пункте сделан определённый шаг на пути повышения логической культуры учащихся. Речь идёт о введении термина «контрпример», о разъяснении способа опровержения общего утверждения с помощью контрпримера. Заметим, что учащимся не раз приходилось иметь дело с опровергающими примерами, но теперь, как говорится, вещи названы своими именами.

Комментарий к упражнениям

468. а) Найдём простые делители каждого из множителей. Число 6 делится на 2 и на 3, число 15 делится на 3 и на 5, число 77 — на 7 и на 11. Значит, простые делители произведения $6 \cdot 15 \cdot 77$ — это числа 2, 3, 5, 7, 11.

469. б) Делителем числа n является также и любой делитель числа 18, т. е. это числа 2, 3, 6, 9.

471. В сильном классе можно не ограничиваться указаниям трёх подходящих чисел, а выйти на обобщение.

а) Можно подставить любое число, кратное 5.

б) Можно подставить любое число, кратное 8.

в) Так как произведение $6 \cdot n$ содержит множитель 2, то можно подставить любое число, кратное 5.

г) Любое число, кратное 5.

472. Верное надо обосновать, сославшись на соответствующее свойство, а неверное опровергнуть с помощью контрпримера.

476. а) Имеем $5 \cdot 29 + 5 \cdot 17 = 5 \cdot (29 + 17) = 5 \cdot 46 = 5 \cdot 2 \cdot 23$. Простыми делителями, кроме числа 5, являются числа 2 и 23. Составные делители — это числа 10, 46, 115, 230.

477. 2) а) Сумма двух чётных чисел — число чётное. Докажем это, проведя рассуждения.

Чётное число делится на 2. По свойству делимости сумма двух чисел, делящихся на 2, тоже делится на 2. Значит, эта сумма есть число чётное.

б) Сумма чётного числа и нечётного есть число нечётное. В самом деле, чётное число — это число, делящееся на 2; нечётное число — это число, не делящееся на 2. Если одно слагаемое делится на 2, а другое не делится, то сумма на 2 не делится. Значит, сумма — число нечётное.

Дополнительный вопрос. Каким числом — чётным или нечётным — является:

1) сумма двух нечётных чисел;

2) сумма двух равных чисел? Ответ обоснуйте.

478. 2) Разбиение на слагаемые может быть разным. Например:

а) $128 = 80 + 48$;

б) $238 = 220 + 18$;

в) $385 = 330 + 55$.

479. а) Сумма двух простых чисел может быть и простым числом, и составным. Примеры: $3 + 2 = 5$, $5 + 2 = 7$, $11 + 2 = 13$, $17 + 2 = 19$ — эти суммы являются простыми числами; $3 + 5 = 8$, $7 + 2 = 9$, $5 + 13 = 18$ — эти суммы являются составными числами. Учащиеся могут выйти на интересное обобщение: чтобы сумма двух простых чисел оказалась простым числом, одним из слагаемых обязательно должно быть число 2. В самом деле, если сложить два нечётных простых числа, то сумма будет числом чётным, а значит, составным.

б) Произведение двух простых чисел всегда есть число составное.

6.4. Признаки делимости

Методический комментарий

В учебнике рассматриваются две группы признаков. Это признаки делимости на 2, на 5 и на 10 (в них делимость устанавливается по последней цифре числа) и признаки делимости на 3 и на 9 (в них вопрос о делимости решается по сумме цифр числа). В силу возрастных возможностей учащихся и с учётом реального багажа их знаний обоснование признаков делимости проводится на числовых примерах, которые носят общий характер и поэтому вполне доказательны.

В результате изучения пункта учащиеся должны понимать термин «признак делимости», знать формулировки признаков делимости на 2, на 3, на 5, на 9, на 10 и уметь приводить иллюстрирующие их примеры; применять признаки для обоснования в ходе несложных рассуждений (см. упражнения **485, 486, 489, 491**). Следует также показать учащимся, как признаки делимости «работают» при разложении числа на простые множители и предложить им удобную схему выполнения этого преобразования (см. упражнение **492**).

Кроме того, полезно познакомить учащихся с иным, более компактным способом формулировки признаков делимости — заменой двух предложений с союзом «если..., то...» на одно, в котором используются слова «тогда и только тогда» или «в том и только том случае». Например: число делится на 5 в том и только том случае, когда оно оканчивается или цифрой 0, или цифрой 5.

Если время и уровень подготовки учащихся позволяют, полезно рассмотреть также признаки делимости на 4, 8, 25 и 11.

Признак делимости на 4: число делится на 4 в том и только том случае, если на 4 делится двузначное число, образованное двумя его последними цифрами.

Например, число 1516 делится на 4, а число 2418 — нет. В самом деле, представим число 1516 в виде суммы следующим образом:

$$1516 = 1500 + 16 = 15 \cdot 100 + 16.$$

Так как множитель 100 делится на 4, то первое слагаемое — число 1500 — делится на 4; второе слагаемое — число 16 — тоже делится на 4. Значит, и сумма, равная 1516, делится на 4.

Представив точно так же в виде суммы число 2418, получим:

$$2418 = 24 \cdot 100 + 18.$$

Очевидно, что эта сумма на 4 не делится.

Признак делимости на 8: число делится на 8 в том и только том случае, если на 8 делится трёхзначное число, образованное тремя его последними цифрами.

Например, число 75 240 делится на 8, а число 46 130 не делится. Чтобы показать это, достаточно рассмотреть вопрос о делимости на 8 сумм $75 \cdot 1000 + 240$ и $46 \cdot 1000 + 130$.

Признак делимости на 25: число делится на 25 в том и только том случае, если на 25 делится двузначное число, образованное двумя его последними цифрами.

Например, число 2775 делится на 25, а число 3965 не делится.

Вполне естественно, что этот признак схож с признаком делимости на 4: ведь делители 2 и 5 играют совершенно одинаковую роль в образовании основания десятичной нумерации — числа 10.

И, наконец, *признак делимости на 11*. Учащимся 5 класса целесообразно предъявить его в форме указания *способа действия*: чтобы выяснить, делится ли число на 11, нужно найти сумму его цифр, стоящих на нечётных местах, и сумму цифр, стоящих на чётных местах, и затем вычислить разность этих сумм; если разность делится на 11, то и данное число делится на 11.

Вот примеры применения этого признака.

Возьмём число 232 408. Получим:

$2 + 2 + 0 = 4, \quad 3 + 4 + 8 = 15; \quad 15 - 4 = 11$ (понятно, что надо из большей суммы вычесть меньшую); так как разность равна 11, то число 232 408 делится на 11.

Возьмём число 4895. В этом случае будем иметь:

$4 + 9 = 13, \quad 8 + 5 = 13; \quad 13 - 13 = 0$; так как 0 делится на 11, то и число 4895 делится на 11.

Упражнения к пункту (и в группе **А**, и в группе **Б**) позволяют поддержать и развить знания, полученные ранее (свойства делимости, простые и составные числа, позиционный характер записи чисел в десятичной системе), а также продемонстрировать возможность получения других признаков делимости на базе уже изученных (см. упражнение **498**). В сильном классе для желающих можно предложить эффектное задание, которое «аккумулирует» в себе все изученные признаки: доказать, что число 2 438 195 760 делится на каждое из чисел от 2 до 18. Работу можно построить так.

Прежде всего, следует обратить внимание на само число; оно десятизначное и для его записи использовать все 10 цифр. (Вот ещё примеры таких чисел, для которых можно выполнить то же задание: 3 785 942 160, 4 753 869 120, 4 876 391 520.)

На доске записывается данное число и под ним аккуратно записываются «цепочкой» все числа от 2 до 18 (в ходе доказательства числа не стираются и не вычёркиваются, так как с ними будет выполнена ещё дополнительная работа).

С помощью признаков делимости устанавливается, что данное число делится на 2, 3, 4, 5, 9, 10. (Заметим, что для этого, вообще говоря, достаточно установить факт делимости на 4, 9 и 10.)

Теперь ясно, что данное число делится на 6 (так как оно делится на 2 и на 3), делится на 12 (так как оно делится на 4 и на 3), делится на 15 (так как оно делится на 3 и на 5), делится на 18 (так как оно делится на 9 и на 2). Вопрос о том, являются ли делителями оставшиеся числа, можно решить непосредственным делением. (Заметим, что на 16 делить необязательно; достаточно разделить на 8 и убедиться, что в частном получается чётное число, или разделить на 4 и убедиться, что в частном опять получилось число, кратное 4.

Завершить работу можно таким заданием: «Укажите ещё какие-нибудь числа, на которые делится данное число». Делителями данного числа являются, например, произведения взаимно простых чисел, находящихся среди указанных делителей.)

Комментарий к упражнениям

490. а) Права Даша, так как число 158 не делится на 3.

491. Нужно вспомнить определение составного числа. Чтобы выполнить задание, достаточно в каждом случае указать один делитель числа, отличный от 1 и от самого числа.

493. Нужно подставлять такую цифру, чтобы сумма цифр получившегося числа делилась на 9.

а) Так как $3 + 1 + 8 = 12$, то надо вместо звёздочки записать цифру 6. Никакая другая цифра не подходит.

б) Надо вписать цифру 7.

в) Имеем $4 + 8 + 2 + 5 = 19$. Сумму цифр следует дополнить до 27. Подходит только цифра 8.

г) Так как $8 + 1 = 9$, то подходят две цифры — это 0 и 9; задача имеет два ответа.

494. а) Сумма цифр числа 546 равна 15; ближайшая к ней сумма, кратная 9, — это 18. Значит, к числу 546 надо прибавить 3. Получим 549.

497. Вспоминаем признаки, в которых вопрос о делимости решается по последней цифре. Приходим к выводу, что простое число не может оканчиваться цифрами 0, 2, 4, 5, 6, 8. Для подбора примеров можно использовать таблицу простых чисел.

498. 1) Надо применить признак делимости на 6: число делится на 6 в том и только том случае, если оно оканчивается чётной цифрой и сумма его цифр делится на 3.

2) Число делится на 45 в том и только том случае, если оно оканчивается или цифрой 0, или цифрой 5 и сумма его цифр делится на 9.

3) Напомним, что число делится на произведение своих делителей a и b, если числа a и b взаимно-простые. В противном случае данное число может как делиться на ab, так и не делиться.

Обращаем внимание на то, что в этом пункте учебника термин «взаимно-простые числа» не вводится. Авторы исходят здесь из принципа «разделения трудностей»: тема «Делимость чисел» достаточно сложна для пятиклассников и насыщена теоретическими сведениями. Указанный термин появляется в п. 8.4 «Приведение дробей к общему знаменателю», где уже может активно использоваться.

6.5. Деление с остатком

Методический комментарий

С операцией деления с остатком учащиеся знакомы из курса начальной школы. В 5 классе этот материал необходимо повторить уже хотя бы потому, что соответствующие знания и умения потребуются при изучении обыкновенных дробей. Учащиеся узнают также некоторые новые аспекты данного вопроса, что позволит им расширить и углубить теоретические знания и развить практические умения.

Рассматривается вопрос о количестве остатков при делении на натуральное число n. При этом деление нацело рассматривается как частный случай деления с остатком, когда остаток равен 0. Обсуждается классификация натуральных чисел (разбиение на классы, на виды) по остаткам от деления: при делении на натуральное число n все натуральные числа разбиваются на n классов (дающие при делении на n остаток, равный 0, равный 1, ..., равный $n - 1$).

В этой связи обращаем внимание учителя на упражнение **509**. Результатом его выполнения должно стать осознание следующего факта: если известно какое-то число из некоторого класса, то другие числа, принадлежащие этому же классу (т. е. дающие такой же остаток при делении на n), можно получать, последовательно прибавляя или вычитая делитель n.

В системе упражнений основное внимание уделено сюжетным задачам, для решения которых необходимо выполнить деление с остатком и дать содержательную интерпретацию полученного результата.

Комментарий к упражнениям

503. Можно предложить проверить правильность ответа, выполнив деление.

506. 1) Так как $36 : 4 = 9$, то в вагоне 9 купе.

2) Так как $20 : 4 = 5$, то 20-е место находится в 5-м купе. Так как $25 : 4 = 6$ (ост. 1), то 25-е место находится в 7-м купе.

3) Так как ближайшее к 26 число, делящееся на 4, это 24, то в этом купе места начинаются с 25-го. Таким образом, в этом купе, кроме места под номером 26, находятся ещё 25-е, 27-е и 28-е места.

507. 1) Каждая пятёрка начинается с карточки белого цвета. Номер каждой следующей карточки белого цвета на 5 больше номера предыдущей. Белые карточки имеют номера 1, 6, 11, 16, 21, ... , 41. Жёлтые карточки в каждой пятёрке идут вторыми. Они имеют номера 2, 7, 12, ... , 42.

2) 10-я карточка — последняя в своей пятёрке, она синего цвета. Карточка с номером 24 идёт четвёртой в своей пятёрке, она красного цвета. Карточка с номером 38 зелёного цвета.

508. 1) $350 \cdot 8 = 2800$ — столько листов бумаги нужно на 8 недель;

2) $2800 = 500 \cdot 5 + 300$ — значит, нужно 6 пачек (пяти пачек не хватит, поэтому к неполному частному надо прибавить 1).

510. Пользуемся признаками делимости на 10 и на 3. Представляем данное число в виде суммы, в которой одно из слагаемых — ближайшее число, делящееся на 10 (или на 3). Тогда второе число — остаток от деления.

а) $482 = 480 + 2$ — при делении на 10 получается остаток, равный 2;

$482 = 480 + 2$ — при делении на 3 получается остаток, равный 2.

б) Остатки соответственно равны 3 и 2.

в) Остатки соответственно равны 7 и 1.

511. Искомое количество чисел показывает неполное частное.

а) 37 чисел; самым большим таким числом является 296. (Это 36-е число, кратное 8. Его можно найти, отняв от 300 остаток от деления на 8.)

б) 41 число; 462 — это 42-е число, кратное 11.

513. Так как $73 = 10 \cdot 7 + 3$, то каникулы длятся 10 полных недель и ещё 3 дня. Каждая неделя каникул, в том числе и последняя неполная, начинается со вторника. Три дня последней (неполной недели) — это вторник, среда, четверг. Значит, первым днём учебного года будет пятница.

515. В сентябре, октябре, ноябре и декабре всего $30 + 31 + 30 + 31 = 122$ дня. При делении 122 на 7 в частном получается 17 и в остатке 3 ($122 = 7 \cdot 17 + 3$). В каждой полной неделе есть суббота. Так как полных недель 17, то получается 17 суббот. Последняя неполная неделя начинается во вторник, значит, на последние три дня первого полугодия суббота не выпадает.

Ответ: 17.

516. а) Если число карандашей уменьшить на 5, то получившееся число должно быть кратно и 6, и 8. Это числа 24, 48, 72, 96. Следовательно, карандашей могло быть 29, 53, 77, 101. Но по условию карандашей больше 50, но меньше 100. Ему удовлетворяют числа 53 и 77. Таким образом, задача имеет два решения.

б) Запишем числа, кратные 12 и большие 150, но меньшие 200. Это числа 156, 168, 180, 192. Увеличим каждое число на 8; получим числа 164, 176, 188, 200. Если увеличить каждое число на 2, то только $188 + 2 = 190$ будет кратно 10. Следовательно, в коробке 188 ложек.

Глава 7. Треугольники и четырёхугольники (10 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
7.1. Треугольники и их виды	2	206—213 (ч. 2)	П-22	**Распознавать** треуголники на чертежах и рисунках, приводить примеры аналогов этих фигур в окружающем мире. **Изображать** треугольники от руки и с использованием чертёжных инструментов, на нелинованной и клетчатой бумаге; **моделировать**, используя бумагу, проволоку и т. д. **Исследовать** свойства треугольников путём эксперимента, наблюдения, измерения, моделирования, в том числе с использованием компьютерных программ. **Измерять** длины сторон, величины углов треугольников. **Классифицировать** треугольники по углам, по сторонам. **Распознавать** равнобедренные и равносторонние треугольники. **Использовать терминологию**, связанную с треугольниками. **Выдвигать гипотезы** о свойствах равнобедренных, равносторонних треугольников, **обосновывать** их. **Объяснять** на примерах, **опровергать** с помощью контрпримеров утверждения о свойствах треугольников. **Находить**

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
				периметр треугольников, в том числе выполняя необходимые измерения. **Конструировать** орнаменты и паркеты, изображая их от руки, с помощью инструментов
7.2. Прямоугольники	2	214—219 (ч. 2)	П-21	**Распознавать** прямоугольники на чертежах и рисунках, **приводить** примеры аналогов прямоугольников в окружающем мире. **Формулировать** определения прямоугольника, квадрата. **Изображать** прямоугольники от руки на нелинованной и клетчатой бумаге, **строить**, используя чертёжные инструменты, по заданным длинам сторон; **моделировать**, используя бумагу, проволоку и т. д. **Находить** периметр прямоугольников, в том числе выполняя необходимые измерения. **Исследовать** свойства прямоугольников путём эксперимента, наблюдения, измерения, моделирования. **Сравнивать** свойства квадрата и прямоугольника общего вида. **Выдвигать гипотезы** о свойствах прямоугольника, **обосновывать** их. **Объяснять** на примерах, **опровергать** с помощью контрпримеров утверждения о свойствах прямоугольников

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
7.3. Равенство фигур	2	220—224 (ч. 2)		**Распознавать** равные фигуры, **проверять** равенство фигур наложением. **Изображать** равные фигуры. **Разбивать** фигуры на равные части, **складывать** из равных частей. **Обосновывать, объяснять** на примерах, **опровергать** с помощью контрпримеров утверждения о равенстве фигур. **Формулировать** признаки равенства отрезков, углов, прямоугольников, окружностей. **Конструировать** орнаменты и паркеты, изображая их от руки, с помощью инструментов
7.4. Площадь прямоугольника	2	225—237 (ч. 2)	П-23	**Вычислять** площади квадратов, прямоугольников по соответствующим правилам и формулам. **Моделировать** фигуры заданной площади, фигуры, равные по площади. **Моделировать** единицы измерения площади. **Выражать** одни единицы измерения площади через другие. **Выбирать** единицы измерения площади в зависимости от ситуации. **Выполнять практико-ориентированные задания** на нахождение площадей. **Вычислять** площади фигур, составленных из прямоугольников. **Находить** приближённое значение площади фигур, разбивая их на единичные квадраты. **Сравнивать**

Продолжение

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
				фигуры по площади и периметру. **Решать** задачи на нахождение периметров и площадей квадратов и прямоугольников. **Выделять** в условии задачи данные, необходимые для её решения, **строить** логическую цепочку рассуждений, **сопоставлять** полученный результат с условием задачи
Обзор и контроль	2	**Распознавать** треугольники, прямоугольники на чертежах и рисунках, **определять** вид треугольников. **Изображать** треугольники, прямоугольники с помощью инструментов и от руки. **Находить** периметр треугольников, прямоугольников. **Вычислять** площади квадратов и прямоугольников. **Решать** задачи на нахождение периметров и площадей квадратов и прямоугольников. **Исследовать** свойства треугольников, прямоугольников путём эксперимента, наблюдения, измерения, моделирования, в том числе с использованием компьютерных программ. **Формулировать** утверждения о свойствах треугольников, прямоугольников, равных фигур. **Обосновывать, объяснять** на примерах, **опровергать** с помощью контрпримеров утверждения о свойствах треугольников, прямоугольников, равных фигур. **Конструировать алгоритм** воспроизведения рисунков, построенных из треугольников, прямоугольников, **строить по алгоритму, осуществлять самоконтроль**, проверяя соответствие полученного изображения заданному рисунку. **Конструировать** орнаменты и паркеты с помощью инструментов и от руки			

Основные цели: познакомить учащихся с классификацией треугольников по сторонам и углам; развить представления о прямоугольнике; сформировать понятие равных фигур, площади фигуры, научить находить площади прямоугольников и фигур, составленных из прямоугольников; познакомить с единицами измерения площадей.

Обзор главы. В этой главе учащиеся углубляют свои знания о треугольниках и четырёхугольниках: они знакомятся с классификациями треугольников по сторонам и углам, со свойствами равнобедренного треугольника, а также со свойствами прямоугольника.

Здесь же вводится понятие равных фигур. Заметим, что у учащихся уже есть интуитивное представление о равных фигурах. Оно сформировалось в ходе выполнения таких заданий, как вырезание фигур из бумаги, перечерчивание фигуры по клеткам квадратной сетки и т. д. При этом речь шла о построении «такой же фигуры, как данная», о вырезании одинаковых фигур. Теперь интуитивные представления учащихся обобщаются и систематизируются. Вводится термин «равные фигуры» и разъясняется, что так называют фигуры, которые могут быть совмещены друг с другом путём наложения. Это понятие конкретизируется по отношению к уже известным фигурам: отрезкам, углам, окружностям и т. д.

Линия измерения геометрических величин продолжается темой «Площадь фигуры». Из начальной школы учащимся известно, как найти площадь прямоугольника. Здесь эти знания актуализируются, отрабатываются и расширяются: формируется представление о площади фигуры как о числе единичных квадратов, составляющих данную фигуру; о свойстве аддитивности площади (без соответствующей терминологии); правило вычисления площади квадрата формулируется через понятие «квадрат числа»; вводятся новые единицы площади (гектар, ар); выявляются зависимости между единицами площади, объясняется, как можно приближённо вычислить площадь круга.

Материалы для контроля.

Учебное пособие «Контрольные работы»: Контрольная работа № 4 «Делимость чисел. Треугольники и четырёхугольники (пп. 7.1—7.3)».

Учебное пособие «Тематические тесты»: Тест 7 «Треугольники и четырёхугольники».

7.1. Треугольники и их виды

Методический комментарий

Содержание данного пункта является, с одной стороны, совершенно новым для учащихся, с другой стороны, весьма значимым с точки зрения геометрии. Оно включает классификацию треугольников по сторонам и углам, а также понятие равнобедренного треугольника (определение, свойство углов при основании). Основным результатом изучения данного пункта следует считать умение распознать и изобразить прямоугольный, остроугольный, тупоугольный, равнобедренный треугольники; знание терминологии, связанной с равнобедренным треугольником.

В процессе практической деятельности учащиеся должны понять: в треугольнике не может быть больше одного прямого или одного тупого угла, равнобедренный треугольник может быть и прямоугольным, и остроугольным, и тупоугольным, а вот равносторонний треугольник только остроугольным.

Комментарий к упражнениям

528. б) Найдём длину третьей стороны треугольника. Она равна $17 - (5 + 6) = 6$ см. Этот треугольник является равнобедренным, так как длины его сторон равны 5 см, 6 см и 6 см.

7.2. Прямоугольники

Методический комментарий

Прямоугольник является для учащихся, пожалуй, самой известной фигурой. Однако из-за недостаточной геометрической подготовки учащихся в начальной школе многие из них воспринимают его как единую фигуру и не видят составляющие его элементы. По этой причине квадрат и прямоугольник для них две различные фигуры, две различные формы: квадратная и прямоугольная. Восполнить этот пробел не удастся, лишь сообщив учащимся, что квадрат тоже прямоугольник. К этой мысли они должны привыкнуть при выполнении упражнений: учащиеся смогут понять, что если некоторое свойство имеет место для прямоугольника общего вида, то оно имеет место и для квадрата, а вот обратное неверно: то, что выполняется для квадрата, может и не выполняться для прямоугольника общего вида. Естественно, что эту мысль должен (и неоднократно) произнести учитель, а учащиеся на этом этапе слушают и осознают.

Учащиеся должны научиться изображать квадрат и прямоугольник с заданными сторонами на клетчатой и нелинованной бумаге от руки и с использованием инструментов, моделировать их из бумаги.

В тексте пункта построение прямоугольника описано таким образом, что каждый выделенный шаг предложенного алгоритма иллюстрируется отдельным рисунком. Таким образом, каждый следующий рисунок содержит в себе предыдущий и построения нового шага. Это позволяет сделать отдельные этапы построения более наглядными, а сопоставление текста и визуальной информации способствует более чёткому выделению этапов построения, их осмыслению и запоминанию.

В качестве дополнительного задания здесь можно предложить учащимся найти другой вариант предложенного алгоритма (построить угол D прямоугольника), обсудить, какие измерения нужно провести в каждом случае для проверки точности и аккуратности выполненных действий (равны ли длины противолежащих сторон, все ли углы прямые).

Новые для учащихся свойства прямоугольника связаны в основном с его диагоналями. В этом пункте они узнают, что диагонали прямоугольника равны и в точке пересечения делятся пополам. В следующем пункте, где речь идёт о равенстве фигур, им предстоит узнать, что диагональ делит прямоугольник на два равных прямоугольных треугольника, а две диагонали — на две пары равных равнобедренных треугольников.

Дополнительное задание. Периметр прямоугольника равен 18 см. Одна сторона больше другой на 1 см. Начертите в тетради такой прямоугольник.

7.3. Равенство фигур

Методический комментарий

Интуитивное понимание учащимися равенства как одинаковости, идентичности использовалось нами при различных видах копирования геометрических фигур. Здесь это интуитивное представление осмысливается и формулируется в виде определения понятия равенства. Оговоримся сразу, что знания этой формулировки от учащихся не требуется. Признаки равенства тоже неоднократно употреблялись ранее на интуитивном уровне: ведь сколько бы отрезков длиной, например, 5 см учащийся ни начертил, все они будут одинаковыми, ничем не отличающимися друг от друга.

Одна из задач пункта — научить учащихся находить в равных фигурах соответственно равные элементы, а также записывать необходимые равенства.

Помимо этого, учащиеся должны увидеть и запомнить, что диаметр разбивает круг на два равных полукруга; диагональ разбивает прямоугольник на два равных треугольника.

Заметим, что в ходе изучения этой темы опосредованно формируется чрезвычайно важное умение — делить фигуру на равные доли.

Это умение, а также соответствующие образы составляют наглядную опору для изучения обыкновенных дробей. Учащиеся должны научиться делить на равные части, в том числе и без инструментов, отрезок, прямоугольник, квадрат, круг. Они должны также получить представление о возможности удвоения числа равных долей: разделить фигуру пополам, ещё раз пополам и т. д.

Дополнительные вопросы и задания

1) Начертите какой-нибудь отрезок. Разделите его от руки на 2, 4, 8 равных частей.

2) Начертите какой-нибудь угол. Проведите на глаз биссектрису угла. Проведите биссектрисы каждого из получившихся углов. На сколько равных частей вы разделили исходный угол?

3) Начертите круг. Разделите его на 2, 4, 8 равных частей. Сколько диаметров вы провели? Сколько диаметров нужно провести, чтобы разбить круг на 16 равных частей? на 32 равные части?

4) Начертите квадрат и разделите его на 8 равных частей разными способами.

5) Начертите прямоугольник и разделите его на 16 равных частей.

Комментарий к упражнениям

559. 2) Из получившихся треугольников можно сложить два различных равнобедренных треугольника. Полезно предложить учащимся изобразить эти треугольники в тетради.

3) Задача, обратная предыдущей задаче. В случае затруднений учащиеся могут воспользоваться треугольниками, рассмотренными в этой задаче.

560. Прежде чем работать с изображением круга в тетради, можно предложить учащимся вырезать круг из листа бумаги и сложить его пополам. Учащиеся увидят, что отрезок, делящий круг на две равные части, должен проходить через центр круга, т. е. это диаметр круга. Ещё раз перегнув круг пополам, учащиеся наглядно увидят, что радиусы «четвертинок» круга образуют прямой угол.

562. а) Задача аналогична составлению фигур из четырёх равных квадратов. Многоугольники изображены на рисунке 22.

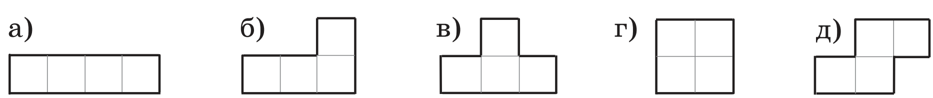


Рис. 22

б) Фигуры изображены на рисунке 23.

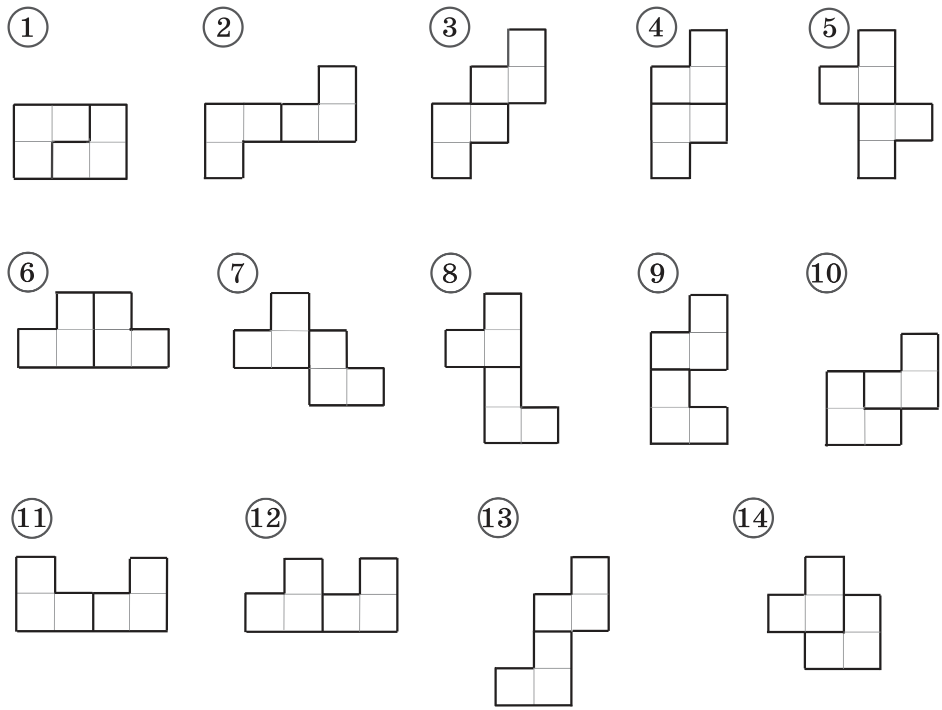


Рис. 23

566. Если учащиеся не знают, что круг составляет 360°, то сначала можно выполнить задание «б» — разделить круг на 6 равных частей. Для этого круг делится пополам, а затем каждый полукруг на 3 равные части.

567. Фигуры изображены на рисунке 24.

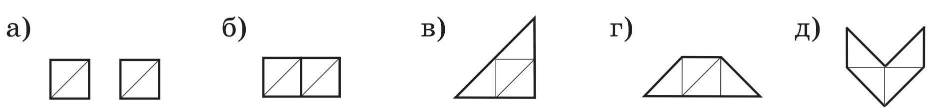


Рис. 24

7.4. Площадь прямоугольника

Методический комментарий

Несмотря на то что понятие «площадь фигуры» и правило вычисления площади прямоугольника известны учащимся из начальной школы, говорить о сформированности этого сложного понятия преждевременно. Поэтому целесообразно снова вернуться к рассмотрению этого вопроса. Новым для учащихся будет то, что первоначально площадь находится в абстрактных единицах — вводятся понятия «единица длины» и «квадратная единица». Сначала фигуры разбиты на квадраты, площади которых приняты за 1 кв. ед., затем осуществляется переход к конкретным метрическим единицам длины и площади. Поначалу можно записывать метрические единицы площади по аналогии с записью 1 кв. ед.: 1 кв. см, 1 кв. м и т. д., а лишь потом перейти к использованию степенной формы записи (см^2, м^2).

Подчеркнём, что учащимся требуется определённое время, чтобы перейти от нахождения площади прямоугольника путём разбиения на единичные квадраты к формальному правилу. Не следует торопить их, иначе это правило может быть усвоено в отрыве от понятия площади фигуры и практическое применение его будет затруднено. Поэтому начать лучше с практического разбиения прямоугольника на соответствующие квадратные единицы (выбор единиц также необходимо обсудить). Например, чтобы найти площадь квадрата со стороной 12 см, учащиеся должны начертить такой квадрат в тетради, разбить его на квадраты со стороной 1 см, закрасить один из квадратов площадью 1 кв. см, а затем подсчитать число таких квадратов. Если учащиеся самостоятельно справляются с подобными заданиями, тогда можно переходить к применению правила.

С единицами площади учащиеся знакомятся уже в начальной школе, но, несмотря на это, многие не имеют о них реальных, наглядных представлений: не могут выбрать единицу площади в конкретном случае, затрудняются оценить на глаз площадь фигуры и т. д. Поэтому прежде всего они должны начертить на листе миллиметровой бумаги 1 мм^2, 1 см^2, 1 дм^2, на доске или на земле 1 м^2 и попытаться их запомнить. Затем полезно оценить площади, например, классной комнаты, окна, доски, тетрадного листа и т. д., мысленно сравнивая их с этими эталонами. Проведя практические измерения или просто прикинув линейные размеры, можно сравнить, например, площадь класса или спортивной площадки с соткой, а площадь школьного участка с гектаром. Здесь также целесообразно предложить каждому ученику практическую работу по нахождению площади своей комнаты.

Предполагается, что при решении задач, содержащих различные единицы площади, учащиеся опираются лишь на знание соотношений между линейными единицами. Запоминание соотношений между квадратными единицами не является обязательным. Рассуждение может быть, например, таким: 1 дм = 10 см, поэтому 1 дм^2 = 10 · 10 = = 100 см^2, а 7 дм^2 = 700 см^2.

Отметим, что к некоторым заданиям данного раздела полезно вернуться при изучении обыкновенных дробей. Так, например, можно задать следующие вопросы: «Чему равны площади фигур, изображённых на рисунке 7.30, если за 1 кв. ед. принять площадь фигуры 3?», «Фигуру (рис. 7.32) разделили на два прямоугольника. Какую часть от площади многоугольника составляет площадь каждого прямоугольника?».

Комментарий к упражнениям

578. Эта задача является обратной задаче нахождения площади прямоугольника по его сторонам и как всякая обратная задача может вызвать затруднения у некоторых учащихся. В этом случае можно переформулировать задачу, уйдя от её геометрического содержания, так: «Произведение двух чисел равно 600, один из множителей — 30. Как найти другой множитель?» Акцент на такие задачи будет сделан в 6 классе при работе с формулами, и здесь они не должны отрабатываться.

580. а) Рассуждаем так: 1 м^2 — это площадь квадрата со стороной 1 м, в одном метре содержится 100 см, значит, в одном квадратном метре содержится 100 · 100 = 10 000 см^2, а в 4 м^2 — 40 000 см^2.

591. Задача решается практически. Надо предложить учащимся начертить в тетради произвольный прямоугольник (квадрат). Уменьшить (увеличить) сторону прямоугольника (квадрата) в 3 раза (вдвое) и начертить новый прямоугольник (квадрат). Легко видеть, что площадь исходного прямоугольника (квадрата) в 3 (4) раза больше (меньше) площади получившегося.

594. Сумма длин смежных сторон данного прямоугольника равна 8 см. Это могут быть прямоугольники со сторонами 1 см и 7 см, 2 см и 6 см, 3 см и 5 см, 4 см и 4 см. Площади этих прямоугольников соответственно равны 7 см^2, 12 см^2, 15 см^2 и 16 см^2. Значит, длины сторон искомого прямоугольника равны 3 см и 5 см.

596. Сначала найдём сторону квадрата, площадь которого равна $4a = 400$ м^2. Она равна 20 м. (Это число находится подбором.) Теперь изобразим этот квадрат в тетради, считая сторону клетки за 2 м. Получим квадрат со стороной 10 клеток. Будем «высаживать яблони» вдоль одной из сторон квадрата, от руки изображая окружности радиусом, равным стороне одной клетки. Понятно, что мы высадили 5 яблонь. Число таких рядов также равно 5, а значит, на этом участке можно высадить $5 \cdot 5 = 25$ яблонь.

598. 1) Полезно наглядно показать учащимся, что площадь цветного квадрата равна половине площади всего квадрата. Для этого надо вырезать квадрат из листа бумаги и загнуть белые треугольники к центру, наложив их на цветные. Мы получим два равных квадрата — белый и цветной.

Глава 8. Дроби (18 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
8.1. Доли	2	—		**Моделировать** в графической, предметной форме доли и дроби. **Решать** текстовые задачи с опорой на смысл понятия доли
8.2. Что такое дробь	3	238—253 (ч. 2)	О-27, П-24, П-25, «Проверь себя»	**Оперировать** с математическими символами: **записывать** доли в виде обыкновенной дроби, **читать** дроби. **Называть** числитель и знаменатель обыкновенной дроби, **объяснять** их содержательный смысл. **Отмечать** дроби точками координатной прямой, **определять** координаты точек, отмеченных на координатной прямой. **Решать** текстовые задачи с опорой на смысл понятия дроби. **Применять** дроби для выражения единиц измерения длины, массы, времени в более крупных единицах
8.3. Основное свойство дроби	3	254—265 (ч. 2)	О-28, П-26	**Формулировать** основное свойство дроби и **записывать** его с помощью букв. **Моделировать** в графической форме и с помощью координатной прямой отношение равенства дробей. **Применять** основное свойство дроби к преобразованию дробей. **Находить ошибки** при сокращении дробей или приведе-

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
				нии их к новому знаменателю и **объяснять** их. **Анализировать** и **формулировать** закономерности, связанные с обыкновенными дробями. **Применять** дроби и основное свойство дроби при выражении единиц измерения величин в более крупных единицах. **Применять** признаки делимости для сокращения дробей. **Доказывать** возможность сокращения дроби с опорой на признаки делимости
8.4. Приведение дробей к общему знаменателю	2	—	О-29, П-27	**Применять** рассмотренные **алгоритмы** приведения дробей к наименьшему общему знаменателю; **распознавать** случаи, в которых применяется тот или иной из разобранных алгоритмов
8.5. Сравнение дробей	3	266—271 (ч. 2)	О-30, П-28, «Проверь себя»	**Моделировать** с помощью координатной прямой отношения «больше» и «меньше» для обыкновенных дробей. **Сравнивать** дроби с равными знаменателями. **Применять** различные приёмы сравнения дробей с разными знаменателями, выбирая наиболее подходящий приём в зависимости от конкретной ситуации. **Находить** способы решения задач, связанных с упорядочиванием и сравнением дробей

Продолжение

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
8.6. Натуральные числа и дроби	2	272—275 (ч. 2)	О-31 П-29, «Проверь себя»	**Моделировать** в графической и предметной форме существование частного для любых двух натуральных чисел. **Оперировать** символьными формами: записывать результат деления натуральных чисел в виде дроби, **представлять** натуральные числа обыкновенными дробями. **Решать** текстовые задачи, связанные с делением натуральных чисел, в том числе задачи из реальной практики
Обзор и контроль	3	**Моделировать** в графической, предметной форме понятия и свойства, связанные с понятием обыкновенной дроби. **Записывать** и **читать** обыкновенные дроби. **Соотносить** дроби и точки на координатной прямой. **Преобразовывать** дроби, **сравнивать** и **упорядочивать** их. **Проводить** несложные **исследования**, связанные со свойствами дробных чисел, опираясь на числовые эксперименты		

Основные цели: сформировать понятие дроби, познакомить учащихся с основным свойством дроби и научить применять его для преобразования дробей, научить сравнивать дроби.

Обзор главы. В предлагаемом курсе обыкновенные дроби изучаются до десятичных. В дальнейшем изложение десятичных дробей строится на естественной математической базе с опорой на знания об обыкновенных дробях.

Основной акцент в данной главе делается на создание содержательных представлений о дробях. Одновременно здесь закладываются умения решать основные задачи на дроби, сокращать дроби и приводить их к новому знаменателю, сравнивать дроби.

Изучение каждого пункта целесообразно предварять выполнением соответствующей серии практических заданий из рабочей тетради, способствующих формированию наглядно-образных представлений о формируемых понятиях (закрашиванием долей фигуры, сравнением дробей с использованием рисунков, обращением долей в более мелкие и в более крупные и т. д.).

Материалы для контроля.

Учебное пособие «Контрольные работы»: Контрольная работа № 5 «Треугольники и четырёхугольники (п. 7.4). Дроби».

Учебное пособие «Тематические тесты»: Тест 8 «Доли и дроби».

8.1. Доли

Методический комментарий

Основное назначение этого пункта — создание содержательной основы для введения понятия дроби. Дробь — это математический способ выражения долей. С понятием доли учащиеся знакомы с начальной школы; оно тесно связано с их жизненным опытом. И на этих уроках необходимо прежде всего убедиться, что учащиеся знают названия долей (понимают и умеют правильно употреблять в речи). Они должны понимать, что для нахождения половины (трети, четверти и т. д.) некоторой величины её нужно разделить на две (три, четыре и т. д.) равные части; чем больше частей, на которые мы делим, тем меньше получается доля. Желательно, чтобы учащиеся получили возможность реально на практике выделять доли целого, поэтому на уроках полезно иметь «подсобный материал» — проволоку, шнур, разрезные модели, плакаты с изображением геометрических фигур, изготовленные из бумаги прямоугольники, квадраты, круги и т. д.

В упражнениях к пункту закладываются основы для восприятия некоторых важных идей, которые получают развитие в дальнейшем, — это основное свойство дроби (упражнение **605**), нахождение части от целого и целого по его части (упражнения **606—608**, **610** и др.). При выполнении заданий учащиеся должны проговаривать решение вслух.

Комментарий к упражнениям

611, 612. Полезные задания, позволяющие повторить соотношения между единицами длины и между единицами массы. Кроме того, оно обучает способу рассуждений в тех случаях, когда требуется выяснить, какую часть одна величина составляет от другой. Для наглядности при выполнении упражнения **611** можно использовать шкалу линейки. Задания желательно выполнить в классе.

615. Условие каждой задачи желательно разобрать с помощью схематического рисунка. Для пункта а) это рисунок 8.7 учебника; для пункта б) надо предложить учащимся выполнить рисунок самостоятельно, опираясь на рисунок из пункта а) как на образец. Вообще, всегда, когда для наглядности можно воспользоваться рисунком, надо это делать.

8.2. Что такое дробь

Методический комментарий

В содержании пункта выделено несколько фрагментов. Первые два из них — понятийные. Они включают в себя само понятие «дробь», раскрытие его содержательного смысла, а также понятия «правильная дробь» и «неправильная дробь». Усвоение этого материала обеспечивается упражнениями **620—631** из группы **А** и поддерживается упражнениями **643**, **644** из группы **Б**. Принципиально важными здесь являются задания, предусматривающие работу с рисунком (упражнения **620—622**), и соответствующие задания из рабочей тетради (238—247, ч. 2). В ходе их выполнения формируются образы, составляющие чувственную основу таких умений, как нахождение указанной части целого и выражение дробью заданной части величины. Выполняя эти задания, ученики должны давать вслух развёрнутые пояснения (см. комментарий к упражнению **620**). И только после этого можно перейти к упражнениям **623—627** из учебника, требующим фактически тех же рассуждений.

Следующий фрагмент — изображение дробей точками координатной прямой. Этот материал является трудным для учащихся, и всё же надо стремиться к тому, чтобы каждый ученик овладел соответствующим умением. Заметим, что приём изображения дроби точкой на координатной прямой не сформулирован в учебнике в виде общего правила, а разъяснён на примере конкретной дроби. Этот пример можно рассматривать как образец рассуждения ученика. Способ построения точки с данной координатой вытекает из самого смысла понятия дроби: знаменатель показывает, на сколько равных частей нужно разделить единичный отрезок, а числитель — сколько таких частей надо взять. Усвоению этого материала будут способствовать упражнения **632—634** из группы **А**, а также **645**, **646** из группы **Б**, причём их целесообразно предварить выполнением заданий на готовом чертеже, которые помещены в рабочей тетради (248—252, ч. 2). В первых упражнениях, посвящённых изображению дробей на координатной прямой, рекомендуемая длина единичного отрезка (число клеток) указана в тексте задания. При выполнении этих упражнений обязательно надо обсудить с учащимися, почему предлагается именно такая длина и какую ещё длину единичного отрезка можно выбрать, чтобы было удобно отмечать требуемые точки. Впоследствии учащиеся научатся выбирать длину нужного отрезка самостоятельно.

И наконец, последний фрагмент — решение задач на дроби (нахождение части от целого и целого по его части). Этот материал представлен в системе упражнений учебника (упражнения **635—642** и **647—650**) и в дидактических материалах. Это первый этап в решении таких задач, и никаких известных правил здесь формулировать не следует. Основу решения составляет понимание смысла дроби. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что ключом к решению рассматриваемых задач является отыскание одной доли. Надо обязательно предлагать учащимся комментировать решение вслух. Осознанию учащимися способа рассуждений будет способствовать изображение условия задачи в виде схематического рисунка. Заметим, что последние задачи в учебнике и дидактических материалах достаточно трудные (см., например, упражнение **650** из учебника), и целесообразность обращения к ним на этом этапе определяется только с учётом возможностей детей.

Комментарий к упражнениям

620. Проведём рассуждения для рисунка *ж*: квадрат разделён на 6 равных частей, поэтому каждая часть составляет $\frac{1}{6}$ квадрата; 2 части закрашены, значит, закрашено $\frac{2}{6}$ квадрата; 4 части не закрашены, т. е. не закрашено $\frac{4}{6}$ квадрата.

Такие же рассуждения следует проводить при выполнении аналогичных заданий из рабочей тетради.

625. а) Рассуждения могут быть такими: всего мячей 8; один мяч составляет $\frac{1}{8}$ всех мячей; синих мячей 3, они составляют $\frac{3}{8}$ всех мячей; красных мячей 5, они составляют $\frac{5}{8}$ всех мячей.

633, 634. Полезно обсудить, почему выбраны именно такие единичные отрезки и какие другие удобно было бы взять (число клеток должно делиться на знаменатели изображаемых дробей).

638. При анализе условия задачи целесообразно до её числового решения обсудить, какой результат получится — больше или меньше 25.

650. а) Когда взяли половину всех книг, то ещё осталось 1 + 2 книги, т. е., иначе говоря, оставшиеся 3 книги — это половина всех книг. Поэтому всего на столе лежало 6 книг. Решение полезно проиллюстрировать, взяв 6 книг и выполнив описанные в задаче действия.

8.3. Основное свойство дроби

Методический комментарий

Как и в предыдущих пунктах, формулировке основного свойства следует предпослать работу с геометрическими моделями (см. рабочую тетрадь), в ходе которой учащиеся осознают возможность выражения одной и той же части целого разными дробями и без каких-либо формальных приёмов поупражняются в замене одной дроби другой, ей равной. После этого можно перейти к изложению материала по учебнику.

Обращаем внимание учителя на необходимость тщательно следить за речью учащихся и их записями в процессе применения основного свойства дроби. (Вот типичные неверные обороты речи: «Умножим дробь на одно и то же число»; «умножим дробь на 2» и пр.)

В пункте рассматривается два вида преобразования дробей с помощью основного свойства: приведение дроби к новому знаменателю и сокращение дроби. Здесь соответствующие умения только начинают формироваться; их развитие будет происходить на протяжении изучения всей темы «Дроби» в 5 классе, а также закрепляться в 6 классе.

Здесь и далее в качестве устных упражнений полезно предлагать вопросы и задания типа:

1) Приведите дробь $\frac{1}{4}$ к знаменателям 8, 12, 20, 36. Замените эту дробь ещё какой-нибудь равной дробью со знаменателем, отличным от указанных. Можно ли привести эту дробь к знаменателю 22?

2) Можно ли привести дробь $\frac{1}{12}$ к знаменателю 24? к знаменателю 30? Почему? Дайте пояснение, используя термин «кратный».

3) Назовите несколько знаменателей, к которым можно привести дроби $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{2}{9}$.

При выполнении заданий на сокращение дробей учащиеся не обязаны сразу же делить числитель и знаменатель на наибольший общий множитель, а имеют право сокращать дробь последовательно. Задания на сокращение дробей предоставляют естественную возможность повторить признаки делимости.

Комментарий к упражнениям

656—663. Целью этих упражнений, помимо выработки технических навыков, является осознание того, что дробь можно привести к любому знаменателю, кратному исходному. Желательно, чтобы учащиеся в результате выполнения подобных заданий научились перечислять знаменатели (в пределах первых тридцати, пятидесяти, ста чисел), к которым может быть приведена данная дробь (например, дроби $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{12}$).

663. Перебирая знаменатели дробей, устанавливаем, что 36 делится на 12, 9, 6, 4, 3, 2. Поэтому к знаменателю, равному 36, можно привести такие дроби: $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{2}$.

674—678. Это серия упражнений на тему «Какую часть...?». Такие упражнения детям уже встречались при изучении предыдущих пунктов. Новым является то, что дробь, выражающую указанную часть величины, теперь ещё приходится сокращать.

677. а) Ученики могут дать такое развёрнутое объяснение: одна девочка составляет $\frac{1}{30}$ часть класса, тогда 12 девочек составят $\frac{12}{30}$ класса, т. е. $\frac{2}{5}$ класса.

Заметим, что сильные учащиеся уже, возможно, сумеют сразу же записать результат в виде дроби $\frac{12}{30}$. Это следует приветствовать, но тем не менее полезно предложить кому-нибудь из класса дать пояснение.

б) Подробное решение можно записать так:

$20 + 12 = 32$ — столько деревьев растёт в саду;

$\frac{1}{32}$ — такую часть всех деревьев составляет одно дерево;

$\frac{20}{32} = \frac{5}{8}$ — такую часть всех деревьев составляет 20 яблонь;

$\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ — такую часть всех деревьев составляет 12 слив.

Если учащиеся овладели свёрнутым алгоритмом рассуждений, то вторую строчку в записи решения можно опустить.

8.4. Приведение дробей к общему знаменателю

Методический комментарий

Умение, формируемое при изучении данного пункта, в дальнейшем станет основой при сравнении дробей, при выполнении арифметических действий с дробями. В примерах 1—2 показаны приёмы определения общего знаменателя двух дробей. В результате их рассмотрения учащиеся понимают, что существует сколько угодно общих знаменателей двух дробей и в качестве их общего знаменателя всегда можно взять произведение знаменателей данных дробей.

Однако вычисления будут проще, если взять наименьшее из общих кратных знаменателей дробей, т. е. наименьший общий знаменатель (НОЗ). Подчеркнём, что приведение дробей к наименьшему общему знаменателю должно рассматриваться как желательный (но необязательный) ход решения. Опыт показывает, что метод отыскания наименьшего общего знаменателя путём разложения знаменателей дробей на простые множители плохо усваивается значительной частью детей данного возраста. Поэтому, учитывая, что знаменатели, используемые в практике вычислений, невелики, мы предлагаем для обязательного усвоения всеми школьниками другой приём, рассмотренный в примере 3 объяснительного текста. В полном виде он сводится к следующему: сначала проверяем, делится ли больший знаменатель на меньший; если делится, то он и является общим знаменателем; если не делится, то будем последовательно перебирать числа, кратные большему знаменателю, и проверять, делятся ли они на меньший знаменатель. Однако с практикой многие учащиеся научатся «сокращать» эту последовательность действий — в несложных случаях сразу видеть число, которое делится на каждый из знаменателей; распознавать взаимно простые знаменатели, для которых наименьшим общим знаменателем является их произведение.

Сильных учащихся можно познакомить и с приёмом нахождения НОК, а значит, и НОЗ, основанным на разложении на простые множители, выбрав для этого соответствующие примеры, для которых данный способ вполне обоснован.

Комментарий к упражнениям

696. д) Будем последовательно перебирать числа, кратные 9 — большему знаменателю, и проверять, делятся ли они и на 6, и на 8. Первое из таких чисел — 72. Найдём дополнительные множители: $72 : 6 = 12$, $72 : 8 = 9$, $72 : 9 = 8$. Ответ: $\frac{12}{72}, \frac{27}{72}, \frac{16}{72}$.

697. а) НОЗ (12, 18, 3, 15) = 180. Ответ: $\frac{15}{180}, \frac{70}{180}, \frac{120}{180}, \frac{48}{180}$.

8.5. Сравнение дробей

Методический комментарий

Обучение приёмам сравнения дробей основано на чувственном опыте детей, полученном ими на предыдущих уроках и при изучении данного пункта в ходе практической деятельности с различными моделями.

Начать, естественно, нужно со сравнения дробей с одинаковыми знаменателями. При этом наглядность имеет принципиальное значение. Соответствующие упражнения есть в рабочей тетради, при их выполнении учащиеся сравнивают дроби с помощью рисунков. Затем можно выполнить упражнения **701—703** из учебника. Заметим, что сформулированное в учебнике правило сравнения дробей с одинаковыми знаменателями скорее должно явиться словесным выражением интуитивно понятного детям приёма, нежели формальным описанием способа действия.

Затем ставится вопрос: «А как же сравнивать две дроби, если их знаменатели различны?» Предлагается общий приём — приведение дробей к общему знаменателю. Далее можно разобрать пример из учебника и упражнения **704—705**.

Теперь можно перейти к обсуждению некоторых других способов сравнения дробей с разными знаменателями (в учебнике это последний фрагмент). Учащиеся легко овладевают сравнением дробей с числителем, равным 1, например $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{100}$. Пояснения могут быть такими: чем больше число детей, на которое делится целое, тем доля меньше (упражнение **706**). Упражнения желательно постоянно сопровождать рисунками, делающими выводы наглядными.

Умея сравнивать такие дроби, как $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4}$, легко установить, что, например, $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$ (дробь $\frac{3}{5}$ меньше, так как она составлена из трёх более мелких долей). Это же умение можно использовать для сравнения дробей $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{5}$ (дробь $\frac{4}{5}$ ближе к 1). В учебнике — в теории и системе упражнений — предусмотрены эти и другие случаи сравнения дробей (упражнения **707—712**, **713**, **718—720**, **721**).

Рассмотренные приёмы сравнения дробей чрезвычайно полезны в плане формирования оценочных умений, «чувства числа», они развивают наблюдательность и сообразительность. Их нужно разбирать со всем классом. Подчеркнём, однако, что из этих «неалгоритмических» приёмов к обязательному минимуму, которым должен овладеть каждый ученик, можно отнести лишь умения сравнивать такие дроби, как $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{100}$ (с числителем, равным 1), $\frac{7}{10}$ и $\frac{10}{7}$ (правильную и неправильную), а также каждую из них с 1.

Комментарий к упражнениям

709. Это задание подготовлено выполнением задания **708**. В случае затруднений нужно обращаться к моделям, к рисункам, к координатной прямой. Это полезно делать и в том случае, если учащиеся сумели дать верный ответ — в качестве наглядной иллюстрации ответа.

715. 2) Задание 1 подсказывает путь решения: разбить дроби на более мелкие одинаковые доли, т. е. привести их к большему общему знаменателю. б) Приведение дробей к знаменателю 12 ничего не даёт, так как получаются дроби $\frac{3}{12}$ и $\frac{4}{12}$. Приведём обе дроби к знаменателю 24: $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$, $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$. Между ними заключено число $\frac{7}{24}$. Можно предложить другое решение. А именно, преобразовать дроби так, чтобы они имели равные числители, отличные от 1: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, и между ними заключено число $\frac{2}{7}$.

Сильным ученикам полезно предложить найти несколько чисел, расположенных между числами $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$.

Для этого достаточно привести дроби $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$ к знаменателю, равному 48, получим $\frac{1}{4} = \frac{12}{48}$. $\frac{1}{3} = \frac{16}{48}$. Между полученными дробями находятся дроби $\frac{13}{48}$, $\frac{14}{48}$, $\frac{15}{48}$. Однако процесс полезно продолжить, приведя эти дроби ещё и к знаменателю, равному 96, 192.

716. а) Можно выразить дроби $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{5}$ в более мелких долях, при этом для выполнения требований задачи общий знаменатель должен быть не меньше 90. В этом случае удастся указать две дроби, удовлетворяющие неравенству: $k = \frac{16}{90}, \frac{17}{90}$. Продолжая «мельчить» доли, т. е. брать знаменатели 120, 150 и т. д., можно получить больше дробей, удовлетворяющих неравенству, и понятно, что таких дробей существует сколько угодно.

Можно поступить иначе: преобразовать дроби так, чтобы они имели одинаковые числители, отличные от 1, например, $\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$, $\frac{1}{5} = \frac{5}{25}$. Между ними находятся дроби $\frac{5}{29}$, $\frac{5}{28}$, $\frac{5}{27}$, $\frac{5}{26}$. Второй способ, однако, менее нагляден, чем первый, его можно разобрать с сильными учащимися.

718. В каждом случае одна из дробей меньше половины, а другая больше.

719—721. Нужно стараться выполнить эти упражнения без приведения дробей к общему знаменателю. Однако в случае затруднений учащиеся могут для сравнения какой-либо пары дробей использовать и этот приём.

8.6. Натуральные числа и дроби

Методический комментарий

При изучении материала этого пункта хорошо вместе с учащимися прочитать текст учебника (впрочем, это относится и ко многим другим пунктам), проанализировав его содержание: с помощью дроби можно записать результат деления любых двух натуральных чисел; любое натуральное число можно разными способами записать в виде дроби, в том числе в виде дроби со знаменателем, равным 1. Дальний прицел здесь — понятие рационального числа, о котором, естественно, на этом этапе не упоминается.

Комментарий к упражнениям

733. а) $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ (км/мин); б) $\frac{24}{15} = \frac{8}{5}$ (км/мин).

739. Всего шесть таких дробей: $\frac{6}{1}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{6}{6}$. Две из них — $\frac{6}{1}$ и $\frac{6}{6}$ представляют натуральные числа. Это другая запись чисел 6 и 1: $\frac{6}{1} = 6$ и $\frac{6}{6} = 1$.

740. Задание сводится к сравнению дробей.

а) $4 : 6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $11 : 15 = \frac{11}{15}$; так как $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, то $\frac{2}{3} < \frac{11}{15}$;

б) $112 : 64 = \frac{7}{4}$, $9 : 4 = \frac{9}{4}$; $\frac{7}{4} < \frac{9}{4}$;

в) $\frac{72}{144} = \frac{1}{2}$, $\frac{36}{108} = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$;

г) $81 : 45 = \frac{9}{5}$, $56 : 48 = \frac{7}{6}$; $\frac{9}{5} > \frac{7}{6}$.

742. 1-й способ. Сравниваемые величины (расход краски на 1 м^2; число шагов, сделанных за секунду; число конвертов, заклеенных за 1 мин) выражаем дробями.

а) Расход первой краски составляет $\frac{2}{5}$ кг на 1 м^2, а второй — $\frac{3}{8}$ кг на 1 м^2. Так как $\frac{2}{5} > \frac{3}{8}$, то вторая краска выгоднее.

б) Коля идёт со скоростью $\frac{3}{2}$ шага в секунду, а Борис — со скоростью $\frac{5}{3}$ шага в секунду. Так как $\frac{3}{2} < \frac{5}{3}$, то Борис идёт с большей скоростью.

в) Таня работает со скоростью $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ конвертов в минуту, а Алёша — со скоростью $\frac{6}{4}$ конвертов в минуту. Так как $\frac{6}{4} > \frac{5}{4}$, то Алёша работает быстрее.

2-й способ. Можно обойтись и без дробей: сравним количество первой и второй красок, затрачиваемое на одну и ту же площадь; количество шагов, которое делают мальчики за одно и то же время; количество конвертов, которое заклеивают ребята за одно и то же время.

а) На 40 м^2 требуется 16 кг краски первого вида и 15 кг краски второго вида, т. е. вторая выгоднее.

б) За 6 с Коля делает 9 шагов, а Борис — 10 шагов, т. е. Борис идёт быстрее.

в) За 8 мин Алёша запечатывает 12 конвертов, тогда как Таня — только 10. Значит, Алёша работает быстрее.

Глава 9. Действия с дробями (34 урока)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
9.1. Сложение и вычитание дробей	5	276—282 (ч. 2)	О-32, О-33, П-30, П-31	**Моделировать** сложение и вычитание дробей с помощью рисунков, схем. **Формулировать** и **записывать** с помощью букв правила сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. **Выполнять** сложение и вычитание дробей с одинаковыми и с разными знаменателями, используя навыки преобразования дробей. **Применять** свойства сложения для рационализации вычислений. **Решать** текстовые задачи, содержащие дробные данные
9.2. Смешанные дроби	3	283—287 (ч. 2)	О-34, П-32	**Объяснять** приём выделения целой части из неправильной дроби, представления смешанной дроби в виде неправильной и **выполнять** соответствующие записи
9.3. Сложение и вычитание смешанных дробей	5	288—291 (ч. 2)	О-35, П-33, П-34, «Проверь себя»	**Выполнять** сложение и вычитание смешанных дробей. **Комментировать** ход вычисления. **Использовать** приёмы проверки результата вычисления. **Исследовать** числовые закономерности

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
9.4. Умножение дробей	5	292—296 (ч. 2)	О-36, П-35, П-36	**Формулировать** и **записывать** с помощью букв правило умножения дробей. **Выполнять** умножение дробей, умножение дроби на натуральное число и на смешанную дробь. **Вычислять** значения числовых выражений, содержащих дроби; **применять** свойства умножения для рационализации вычислений. **Проводить** несложные исследования, связанные со свойствами дробных чисел, опираясь на числовые эксперименты. **Решать** текстовые задачи, содержащие дробные данные, **осуществлять самоконтроль**, проверяя ответ на соответствие условию
9.5. Деление дробей	5	297—307 (ч. 2)	О-37, П-37, П-38, «Проверь себя»	**Формулировать** и **записывать** с помощью букв свойство взаимно обратных дробей, правило деления дробей. **Выполнять** деление дробей, деление дроби на натуральное число и наоборот, деление дроби на смешанную дробь и наоборот. **Использовать** приёмы проверки результата вычисления. **Выполнять** разные действия с дробями при вычислении значения выражения, содержащего несколько действий. **Решать** текстовые задачи, содержащие дробные данные, **интерпретировать** ответ задачи в соответствии с поставленным вопросом

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
9.6. Нахождение части целого и целого по его части	5	308—309 (ч. 2)	О-38, О-39, П-39, П-40, «Проверь себя»	**Моделировать** условие текстовой задачи с помощью рисунка, **строить** логическую цепочку рассуждений. **Устанавливать** соответствие между математическим выражением и его текстовым описанием. **Решать** задачи на нахождение части целого и целого по его части, опираясь на смысл понятия дроби либо на общий приём: умножение или деление на соответствующую дробь. **Воспроизводить** рассмотренные способы рассуждений. **Осуществлять самоконтроль**, проверяя ответ на соответствие условию
9.7. Задачи на совместную работу	3	310 (ч. 2)	О-40	**Решать** задачи на совместную работу. **Использовать** приём решения задач на совместную работу для решения задач на движение. **Распознавать** задачи, для решения которых применим приём решения задач на совместную работу
Обзор и контроль	3	**Вычислять** значения числовых выражений, содержащих дроби. **Применять** свойства арифметических действий для рационализации вычислений. **Решать** текстовые задачи, содержащие дробные данные. **Использовать** приёмы решения задач на нахождение части целого и целого по его части		

<u>**Основные цели:**</u> обучить учащихся сложению, вычитанию, умножению и делению обыкновенных и смешанных дробей, сформи-

ровать умение решать задачи на нахождение части целого и целого по его части.

Обзор главы. При овладении приёмами действий с обыкновенными дробями учащиеся используют навыки преобразования дробей (приведения к общему знаменателю и сокращения дробей). В этой главе вводится понятие смешанной дроби и показываются приёмы обращения смешанной дроби в неправильную и выделения целой части из неправильной дроби, способы выполнения арифметических действий со смешанными дробями. В систему упражнений главы включены задания на вычисление значений выражений, требующих выполнения нескольких действий с дробными числами.

Как и в натуральных числах, внимание уделяется формированию умений выполнять оценку и прикидку результатов арифметических действий с дробными числами.

В качестве специального вопроса рассматриваются приёмы решения задач на нахождение части целого и целого по его части. Учащиеся уже решали такие задачи, опираясь на смысл понятия дроби. Здесь же показываются формальные приёмы решения этих задач путём умножения или деления на дробь.

Линия решения текстовых задач продолжается при рассмотрении задач на совместную работу.

Материалы для контроля.

Учебное пособие «Контрольные работы»: Контрольная работа № 6 «Действия с дробями».

Учебное пособие «Тематические тесты»: Тест 9 «Сложение и вычитание дробей», тест 10 «Умножение и деление дробей». Тест 11 «Нахождение части целого и целого по его части».

9.1. Сложение и вычитание дробей

Методический комментарий

Вначале целесообразно выполнить несколько заданий на сложение дробей с одинаковыми знаменателями с опорой на рисунки. С этой целью можно использовать рисунки из учебника и рабочей тетради к предыдущим параграфам.

Каждое задание должно сопровождаться записью соответствующего равенства. Например, с опорой на рисунок можно получить такие результаты:

$$\frac{1}{8}+\frac{4}{8}=\frac{5}{8},\ \frac{1}{8}+\frac{6}{8}=\frac{7}{8},\ \frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\ \frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{8}{8}=1.$$

Затем формулируется правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями, и уже без привлечения рисунков выполняются упражнения из учебника. Заметим, что в ряде случаев приходится упрощать ответ, сокращая получившуюся дробь (упражнение **746**).

Теперь, опираясь на определение вычитания чисел, пример из учебника и рисунок 9.1, формулируется и записывается с помощью букв правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Правило закрепляется выполнением упражнений **747—748**.

Далее рассматривается сложение дробей с разными знаменателями. Так как основную трудность для учащихся представляет приведение дробей к общему знаменателю, то на этих уроках целесообразно ещё раз специально потренироваться в выполнении этого преобразования. С этой целью можно использовать задания на сложение дробей из учебника и дидактических материалов, ограничившись требованием указания общего знаменателя и дополнительных множителей к дробям. В простых случаях задание можно выполнять устно. Таким образом, по основным упражнениям к пункту полезно пройтись дважды, ставя каждый раз разные учебные цели.

Значительное внимание уделяется развитию умения рассматривать и подмечать закономерность в записи цепочки, составленной из числовых выражений, объяснять, по какому правилу она составлена, записать по правилу последующее выражение (упражнения **752**, **765**).

В упражнения к пункту включены задачи на совместную работу, с которыми учащиеся встречаются впервые (упражнения **766—768**). Заметим, что задачам такого типа посвящён отдельный пункт, а здесь основное внимание можно уделить «элементарным составляющим» решения таких задач (упражнение **760**). Вот пример рассуждения, к которому следует приучать учащихся: «Весь заказ рабочий может выполнить за 3 ч. Значит, за 1 ч он выполнит $\frac{1}{3}$ часть заказа».

Комментарий к упражнениям

752. Учащиеся запишут цепочку из шести равенств и, подметив закономерность, запишут 10-е равенство:

1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$; 4) $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$;

5) $\frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$; 6) $\frac{1}{7} - \frac{1}{14} = \frac{1}{14}$; ...; 10) $\frac{1}{11} - \frac{1}{22} = \frac{1}{22}$.

756. При выполнении упражнения учащиеся должны назвать компонент действия и сформулировать правило, по которому он находится.

758. Задача решается по действиям с пояснениями, ответ выражается в более мелких единицах измерения. Полезно для самоконтроля рассуждать иначе: устно выразить данные величины в граммах и решить задачу.

765. Выполняя вычисления, учащиеся запишут:

1) $\frac{1}{2^2 - 1} = \frac{1}{3}$;

2) $\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$;

3) $\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$.

Каждое последующее выражение, начиная со второго, есть сумма дробей, отличающихся знаменателями. В знаменателе каждой дроби записана разность квадрата чётного числа (2, 4, 6) и единицы. Следующее выражение записывается виде суммы четырёх дробей; его значение — дробь, в числителе которой 4 (номер выражения), в знаменателе $9(2 \cdot 4 + 1)$.

4) $\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} + \frac{1}{8^2 - 1} = \frac{4}{9}$.

9.2. Смешанные дроби

Методический комментарий

Вводится понятие смешанной дроби и на примерах разъясняются приёмы выделения целой части из неправильной дроби и обращения смешанной дроби в неправильную.

Важно, чтобы учащиеся понимали смысл такой записи, как $2\frac{2}{3}$, — это сумма чисел 2 и $\frac{2}{3}$. Этому способствуют такие упражнения, как **773—774**, а также упражнения **775** и **776**.

В учебнике не формулируется правило обращения смешанной дроби в неправильную и наоборот. Эти правила громоздки и плохо воспринимаются учащимися. Поэтому начинать объяснение с этих правил нецелесообразно. Соответствующие приёмы удобнее разъяснять на конкретных примерах, как это сделано в тексте учебника. В то же время после серии упражнений на обращение смешанной дроби в неправильную можно перейти к свёрнутой записи и даже сформулировать соответствующее правило, которое в этом случае уже выступает как словесное описание известного ученикам приёма.

Комментарий к упражнениям

775, 776. Упражнения целесообразно предварить выполнением заданий на готовом чертеже, которые помещены в рабочей тетради. Полезно обсудить, почему выбраны именно такие единичные отрезки и какие другие удобно было бы взять.

777, 778. Для слабых учащихся предложите несколько упражнений на деление с остатком двузначного числа на однозначное (двузначное) число.

781. Дополните упражнение заданием показать для данного дробного числа его примерное расположение на координатной прямой.

787. б) Решение задачи можно записать в таком виде:

$$\frac{3}{10} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{9 + 24 + 20}{30} = \frac{53}{30} = 1\frac{23}{30} \text{ (ч)} = 1 \text{ ч } 46 \text{ мин.}$$

9.3. Сложение и вычитание смешанных дробей

Методический комментарий

При сложении смешанных дробей учитывается тот факт, что каждое из них представляет сумму целого числа и дроби. Заметим, что использование скобок в ходе письменного выполнения упражнений нецелесообразно.

В этом же пункте рассматриваются примеры на нахождение разности двух чисел, когда одно из них или оба выражаются смешанными дробями. Здесь прежде всего целесообразно познакомить учащихся с общим приёмом, заключающимся в замене компонентов действий обыкновенными дробями (в учебнике пример 1, упражнение **799**), а затем и с некоторыми способами рационализации вычислений. Они основаны на том, что смешанная дробь может быть представлена в виде суммы.

Обращаем также внимание учителя на случай вычитания из целого числа, в частности из единицы (упражнения **800—803**). Желательно, чтобы дети научились выполнять такие вычисления устно, находя дополнения дроби до 1.

Помимо рационального приёма, рассматриваемого в учебнике (пример 3), разберём и другие. Подчеркнём, однако, что этот материал даётся прежде всего для учителя.

Пример. Найдём разность $4\frac{2}{5} - \frac{3}{5}$.

1-й способ. Если учащиеся хорошо могут выполнять вычитание типа $4 - \frac{3}{5}$, то вычислять можно так:

$$4\frac{1}{5} - \frac{3}{5} = \left(4 - \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} = 3\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = 3\frac{3}{5}.$$

Промежуточную запись можно не делать, заменив её устным пояснением.

2-й способ. Можно вычитание представить в виде суммы дробей так, чтобы было удобно вычитать по частям:

$$4\frac{1}{5} - \frac{3}{5} = 4\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) = 4 - \frac{2}{5} = 3\frac{3}{5}.$$

Комментарий к упражнениям

794, 795. Сначала дроби приводятся к общему знаменателю.

798. Сначала надо последовательными вычислениями найти все десять членов последовательности. Затем можно записать сумму этих десяти чисел и постараться найти удобный способ для её вычисления. Ответ: $32\frac{1}{2}$.

813. Четвёртое равенство записывается в виде

$$1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{8} + 4\frac{1}{16} + 5\frac{1}{32} = 15\frac{31}{32}.$$

Проверка: $10\frac{15}{16} + 5\frac{1}{32} = 15 + \frac{30 + 1}{32} = 15\frac{31}{32}$.

814. В рассматриваемой цепочке разностей на 100-м месте должна стоять разность $100 - \frac{1}{101}$; разность равна $99\frac{100}{101}$.

816. Можно рассуждать так:

а) $9\frac{9}{10}$ меньше 10 на $\frac{1}{10}$ или $\frac{10}{100}$, поэтому, если к $9\frac{9}{10}$ прибавить лишь $\frac{1}{100}$, то их сумма будет меньше 10;

б) $9\frac{3}{4}$ меньше 10 на $\frac{1}{4}$, а $\frac{1}{25}$ меньше $\frac{1}{4}$, следовательно, сумма $9\frac{3}{4} + \frac{1}{25}$ меньше 10.

9.4. Умножение дробей

Методический комментарий

Учащиеся должны научиться умножать обыкновенные дроби, включая случаи умножения с натуральными числами и смешанными дробями, познакомиться с применением свойств умножения для упрощения вычислений, освоить решение несложных задач, приводящих к умножению обыкновенных дробей.

Объяснение нового материала в учебнике проведено на задаче о вычислении площади прямоугольника, которая позволит продемонстрировать целесообразность принятого правила умножения дробей. Говоря о выполнении свойств умножения для обыкновенных дробей, полезно, чтобы учащиеся убедились в этом на конкретных примерах. Так, для дробей $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{7}$ имеем

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35} \text{ и } \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{35}, \text{ т. е. } \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5}.$$

В учебнике не рассматривается специальное правило умножения дроби на натуральное число. Натуральное число записывается в виде дроби со знаменателем 1, и вычисления проводятся по общему правилу. Рекомендуем, чтобы учащиеся во избежание ошибок достаточно долго представляли произведение натурального числа и дроби в виде произведения двух дробей, не переходя к свёрнутой записи с пропуском этого этапа. В то же время сильным учащимся в качестве самостоятельного задания на завершающем этапе изучения темы можно предложить сформулировать правило умножения дроби на натуральное число. Оно может быть таким: чтобы умножить дробь на натуральное число, надо умножить на это число числитель дроби и полученное произведение записать числителем, а знаменатель оставить прежним.

При умножении дроби на смешанную дробь учащиеся встречаются с уже знакомым общим приёмом, заключающимся в обращении смешанной дроби в обыкновенную. В то же время полезно показать, что в простых случаях умножение смешанной дроби на натуральное число можно выполнить устно (упражнение **827**).

Сюжеты задач, содержащихся в пункте, учащимся уже привычны, однако в них усложнена «числовая основа» за счёт использования дробных данных. В результате учащиеся могут затрудняться в решении знакомых задач. Поэтому полезно научить их такому приёму: заменить в условии дробные данные целыми числами, подумать, как решается такая задача, а затем перенести этот способ на исходную ситуацию.

Комментарий к упражнениям

833. Можно рассмотреть два способа: 1) выполнить сначала действия в скобках; 2) сначала раскрыть скобки, воспользовавшись распределительным свойством.

Со слабыми учащимися лучше ограничиться первым приёмом. После того как учащиеся поупражняются в вычислениях по действиям, можно предложить им задания, при выполнении которых целесообразны иные решения:

1) $24 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 24 \cdot \frac{1}{2} + 24 \cdot \frac{1}{3} + 24 \cdot \frac{1}{4} = 12 + 8 + 6 = 26;$

2) $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\right) = \frac{5}{7} \cdot 1 = \frac{5}{7}.$

837. Проверьте, умеют ли учащиеся употреблять термины «степень», «показатель степени», «основание степени», представить степень в виде произведения равных множителей, знают ли квадраты чисел в рамках таблицы умножения.

838. Обратите внимание на тех учащихся, которые путают правило нахождения периметра прямоугольника с правилом нахождения его площади. Повторите единицы площади, их соотношение.

841. Значение каждого выражения вычисляется устно:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\ \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3};\ \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

Следующее равенство записывается в виде

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}.$$

842, 844. Воспользуйтесь выводами, полученными в упражнении **832.**

844. Вывод можно получить разными способами. Рассмотрите два из них.

Способ 1. Выполнив вычисления и приведя дроби к общему знаменателю, получим цепочку: $\frac{99}{100}=\frac{9900}{10000}$; $\frac{9999}{10000}$; $\frac{9801}{10000}$. Отсюда вывод: наименьшее значение имеет выражение $\left(1-\frac{1}{100}\right)^2$.

Способ 2. Значение первого выражения меньше значения второго выражения, так как $\frac{1}{100}>\left(\frac{1}{100}\right)^2$. Значение каждого выражения — правильная дробь. Поэтому значение третьего выражения $\left(1-\frac{1}{100}\right)^2$ меньше значения первого выражения $1-\frac{1}{100}$.

Отсюда вывод: наименьшее значение имеет выражение $\left(1-\frac{1}{100}\right)^2$.

9.5. Деление дробей

Методический комментарий

Учащиеся должны усвоить понятия дроби, обратной данной, взаимно обратных дробей, научиться делить обыкновенные дроби, включая случаи деления с натуральными числами и смешанными дробями, освоить решение несложных задач, приводящих к делению обыкновенных дробей. При объяснении нового материала надо подчеркнуть, что деление на дробь сводится к умножению на дробь, обратную делителю. А умножать дроби мы уже умеем. Иначе говоря, нужно явно указать на взаимосвязь нового материала с ранее изученным.

В тех случаях, когда делимое или делитель является натуральным числом, учащиеся должны использовать развёрнутую запись, не опуская этап представления натурального числа в виде дроби со знаменателем, равным 1.

Комментарий к упражнениям

857. а) Задача решается делением:

50 см — это $\frac{1}{2}$ м; $7\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 15$ (кусков).

Желательно рассмотреть иное рассуждение: так как в 1 м два куска по 50 см, то в $7\frac{1}{2}$ м 15 таких же кусков.

858, 859. Задачи решаются делением. В результате деления получается дробь, но ответ выражается ближайшим целым числом. Число выбирается по смыслу условия задачи.

861. Проверьте, знают ли учащиеся, как найти неизвестный множитель, неизвестное слагаемое, любой другой компонент арифметического действия.

864. а) Решение можно записать цепочкой.

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{24} : 1\frac{1}{14} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{14}}}{\underset{1}{\cancel{7}} \cdot \underset{\underset{3}{\cancel{6}}}{\cancel{24}} \cdot \underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{1}{9}.$$

871. Обратите внимание на порядок действий при вычислении значений выражений, содержащих степени: $\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 5$; $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 5$.

877. Надо рассмотреть два случая, так как туристы сначала двигаются навстречу друг другу, а потом удаляются друг от друга.

9.6. Нахождение части целого и целого по его части

Методический комментарий

Овладение способами решения задач указанного вида является одной из важнейших целей изучаемой темы. Здесь рассматриваются два способа решения таких задач — на основе смысла понятия дроби и с помощью формальных правил (умножение и деление на дробь). Заметим, что на этом этапе второй способ можно вообще не рассматривать, ограничившись лишь решением задач на содержательной основе. Дело в том, что в начале 6 класса в теме «Дроби и проценты» учащиеся ещё раз возвращаются к решению задач указанных видов, и второй, более формальный способ решения таких задач может быть рассмотрен в следующем проходе. Однако и в том случае, если будут рассмотрены оба способа, учащийся каждый раз вправе решать, каким способом ему удобнее получить ответ. Подчеркнём, что решение практически всех задач должно сопровождаться рисунком, и более того, рисунок может составлять основу решения задачи.

Комментарий к упражнениям

884. б) Возможно такое решение: дроби $\frac{1}{20}$ и $\frac{3}{50}$ приводятся к знаменателю 100, а потом находят $\frac{1}{100}$ от числа страниц и этот результат умножают на 5, 6, 3.

885. Рекомендуем решать задачу прямым вычислением расстояний: сначала пройденного в первый день, потом во второй день и затем в третий день.

Но после решения следующей задачи **886** советуем вернуться к данной и записать другое её возможное решение. Например, для **855** б):

1) $\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{31}{40}$ — такую часть пути проехали за два дня;

2) $1 - \frac{31}{40} = \frac{9}{40}$ — такую часть пути проехали за 3-й день;

3) $360 \cdot \frac{9}{40} = 81$ (км) — столько проехали за 3-й день.

887. Ещё раз обращаем внимание учителя на то, что решение этой и последующих задач должно сопровождаться рисунком.

894. а) Выясните, какую часть книги занимает первая повесть, и решите задачу на нахождение целого по его части. Понимание идеи решения задач этого упражнения поможет освоению способа решения задачи, разобранной в следующем упражнении.

9.7. Задачи на совместную работу

Методический комментарий

В ходе изучения материала учащиеся осваивают новый для них, довольно трудный тип задач. В обязательные результаты обучения подобные задачи не входят. Тем не менее желательно организовать работу так, чтобы школьники сами «открыли» способ решения таких задач. Для этого уже есть предпосылки — при изучении предыдущих тем учащиеся решали задачи, являвшиеся отдельными элементами задач на совместную работу (упражнения **760, 766—768, 818, 839**). Так, в задаче **760** при условии «Рабочий может выполнить заказ за 3 ч, а ученик — за 7 ч» требуется ответить на вопросы: «Какую часть заказа выполнит рабочий за 1 ч? Какую часть заказа выполнит ученик за 1 ч? Какую часть заказа они выполнят, работая вместе, за 1 ч?» Кроме того, в учебном тексте найдено методическое решение, помогающее учащимся понять идею решения задач на совместную работу.

Здесь также продолжается решение задач на движение, которое подготовлено рассмотренными ранее задачами.

Комментарий к упражнениям

907. а) План решения задачи может быть следующим:

1) Какую часть материалов расходуют в день оба цеха, работая вместе? $\left(\frac{1}{10}.\right)$

2) Какую часть материалов расходует в день первый цех? $\left(\frac{1}{30}.\right)$

3) Какую часть материалов расходует в день второй цех? $\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{1}{15}.\right)$

4) За сколько дней израсходует материалы второй цех, если будет работать один? (За 15 дней.)

908. Первая бригада выполняет в день $\frac{1}{9}$ задания, за 3 дня она выполнила $\frac{1}{3}$ задания. Второй бригаде осталось выполнить $\frac{2}{3}$ задания. Она выполняет в день $\frac{1}{12}$ задания, поэтому закончит работу за $\frac{2}{3} : \frac{1}{12} = 8$ дней. Вся работа будет выполнена за $3 + 8 = 11$ дней.

912. Решение.

1) $1 : 6 = \frac{1}{6}$ — такую часть расстояния проплывает катер за 1 ч по озеру;

2) $1 : 5 = \frac{1}{5}$ — такую часть расстояния проплывает катер за 1 ч по течению реки;

3) $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ — на такую часть расстояния сносится течением катер, а значит, и плот за 1 ч;

4) $1 : \frac{1}{30} = 30$ (ч) — столько времени потребуется плоту.

913. Решение.

Плот плывёт от A до B, значит, катер при этом движется по течению реки, а от B до A — против течения.

1) $1 : 40 = \frac{1}{40}$ — такую часть расстояния проплывает плот за 1 ч по течению реки;

2) $1 : 4 = \frac{1}{4}$ — такую часть расстояния проплывает катер за 1 ч по течению реки;

3) $\frac{1}{4} - \frac{1}{40} = \frac{9}{40}$ — такую часть расстояния проплывает катер за 1 ч в стоячей воде;

4) $\frac{9}{40} - \frac{1}{40} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$ — такую часть расстояния проплывает катер за 1 ч против течения;

5) $1 : \frac{1}{5} = 5$ (ч) — такое время затратит катер на путь от B до A.

914. Стандартная ошибка, которую допускают учащиеся при решении этой задачи: действием $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ они «находят» скорость течения (часть расстояния, на которую река относит за 1 ч лодку, плот, бревно и т. п.). Между тем, чтобы найти скорость течения, надо результат этого действия ещё разделить на 2.

915. а) За 30 ч слон выпьет 10 озёр, слониха — 6 озёр и слонёнок — 5 озёр, т. е. все вместе они выпьют $10 + 6 + 5 = 21$ озеро. Значит, одно озеро они выпьют за $\frac{30}{21} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$ ч.

б) Лошадь съедает воз сена за месяц, значит, за год она съедает 12 возов сена. Коза, которая съедает воз сена за два месяца, за год съедает 6 возов сена. А овца, которая съедает воз сена за три месяца, за год съест 4 воза сена. Значит, вместе они за год (т. е. за 12 месяцев) съедят $12 + 6 + 4 = 22$ воза сена. Поэтому воз сена они съедят за $12 : 22 = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$ месяца.

Глава 10. Многогранники (10 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
10.1. Геометрические тела и их изображение	2	311—324 (ч. 2)	П-41	**Распознавать** на чертежах, рисунках, в окружающем мире многогранники. **Читать** проекционные изображения пространственных тел: распознавать видимые и невидимые рёбра, грани, вершины. **Копировать** многогранники, изображённые на клетчатой бумаге, **осуществлять самоконтроль**, проверяя соответствие полученного изображения заданному. **Моделировать** многогранники, используя бумагу, пластилин, проволоку и т. д. **Исследовать** свойства многогранников, используя эксперимент, наблюдение, измерение, моделирование. **Описывать** их свойства, используя соответствующую терминологию. **Сравнивать** многогранники по числу и взаимному расположению граней, рёбер, вершин
10.2. Параллелепипед	2	325—338 (ч. 2)	П-42	**Распознавать** на чертежах, рисунках, в окружающем мире параллелепипед. **Копировать** параллелепипеды, изображённые на клетчатой бумаге, **осуществлять самоконтроль**, проверяя соответствие полученного изображения заданному.

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
				Моделировать, используя бумагу, пластилин, проволоку и т. д. **Определять** взаимное расположение граней, рёбер, вершин параллелепипеда. **Находить** измерения параллелепипеда. **Исследовать** свойства параллелепипеда, используя эксперимент, наблюдение, измерение, моделирование. **Формулировать** утверждения о свойствах параллелепипеда, **опровергать** утверждения с помощью контрпримеров. **Распознавать** развёртки куба и параллелепипеда. **Моделировать** параллелепипед из развёрток. **Исследовать** развёртки куба, особенности расположения отдельных её частей, используя эксперимент, наблюдение, измерение, моделирование. **Изображать** развёртки куба на клетчатой бумаге
10.3. Объём параллелепипеда	2	—	П-43	**Моделировать** параллелепипеды из единичных кубов, подсчитывать число кубов. **Вычислять** объёмы параллелепипедов, кубов по соответствующим правилам и формулам. **Моделировать** единицы измерения объёма. **Выражать** одни единицы измерения объёма через другие. **Выбирать** единицы измерения объёма в зависимости

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Дидактические материалы	Характеристика основных видов деятельности учащихся
				от ситуации. **Выполнять практико-ориентированные задания** на нахождение объёмов объектов, имеющих форму параллелепипеда. **Решать** задачи на нахождение объёмов параллелепипедов. **Вычислять** объёмы многогранников, составленных из параллелепипедов
10.4. Пирамида	2	339—345 (ч. 2)	П-44	**Распознавать** на чертежах и в окружающем мире пирамиду. **Называть** пирамиды. **Копировать** пирамиды, изображённые на клетчатой бумаге. **Моделировать**, используя бумагу, проволоку и т. д. **Исследовать** свойства пирамиды, используя эксперимент, наблюдение, измерение, моделирование. **Формировать** утверждения о свойствах пирамиды. **Распознавать** развёртки пирамиды. **Моделировать** пирамиду из развёрток
Обзор и контроль	2	**Распознавать** на чертежах, рисунках, в окружающем мире многогранники. **Выделять** видимые и невидимые грани, рёбра. **Изображать** их на клетчатой бумаге, моделировать, используя бумагу, пластилин, проволоку и т. д. **Характеризовать** взаимное расположение и число элементов многогранников по их изображению. **Исследовать** многогранники, используя эксперимент, наблюдение, измерение, моделирование. **Описывать** их свойства. **Вычислять** объёмы параллелепипедов, **использовать** единицы измерения объёма. **Решать** задачи на нахождение объёмов параллелепипедов		

Основные цели: познакомить учащихся с такими телами, как цилиндр, конус, шар; сформировать представление о многограннике; познакомить со способами изображения пространственных тел, в том числе научить распознавать многогранники и их элементы по проекционному чертежу; научить изображать параллелепипед и пирамиду; познакомить с понятием объёма, единицами объёма и правилом вычисления объёма прямоугольного параллелепипеда.

Обзор главы. В данной главе учащиеся знакомятся с такими геометрическими телами, как цилиндр, конус и шар, объектом же более детального исследования являются многогранники.

Важнейшей целью изучения данного раздела является развитие пространственного воображения учащихся. В ходе выполнения заданий необходимо учить их осуществлять несложные преобразования созданного образа, связанные с изменением его пространственного положения или конструктивных особенностей (например, мысленно свернуть куб из развёртки).

Учащиеся знакомятся со способами изображения геометрических тел на листе бумаги (рисунок сплошной или прозрачной модели, проекционный чертёж) и учатся «читать» эти изображения, отмечая основные конструктивные особенности геометрического тела: число вершин, рёбер, граней, их расположение.

Более подробно учащиеся изучают такие многогранники, как параллелепипед и пирамида. Они учатся распознавать их на сплошных и каркасных моделях и по графическим изображениям, изображать на клетчатой бумаге, узнавать основные конструктивные особенности: число вершин, граней и рёбер, форму граней, число рёбер, сходящихся в вершинах, и т. д.

Линия измерения геометрических величин продолжается темой «Объём параллелепипеда», изложение которой построено по такому же плану, как и тема «Площадь прямоугольника»:

1) выбор единиц объёмов;

2) объём параллелепипеда есть число составляющих его единичных кубов;

3) вывод правила вычисления объёма параллелепипеда.

Материалы для контроля.

Учебное пособие «Тематические тесты»: Тест 12 «Многогранники».

10.1. Геометрические тела и их изображение

Методический комментарий

Чтобы научиться различать геометрические тела, знать их основные свойства, учащиеся должны не только зрительно изучать их, но и иметь возможность взять изучаемое тело в руки, провести ладонью по его поверхности. Они впервые сталкиваются сразу с четырьмя типами поверхностей: сферической, цилиндрической, конической и многогранной. Для того чтобы научиться различать их, учащиеся должны руками ощутить, что у многогранников все части поверхности плоские; шар абсолютно круглый — у него нет ни одной плоской части; поверхности цилиндра и конуса более сложные — они состоят как из плоских частей, так и кривых, причём у цилиндра две плоские части, а у конуса одна, но они имеют одинаковую форму — форму круга.

Учителю необходимо позаботиться о том, чтобы учащиеся имели возможность ознакомиться как можно с большим числом различных многогранников, определить в каждом форму граней, число вершин, рёбер и граней и выявить особенности их расположения.

Для исследования формы граней многогранника необходимо использовать его сплошную модель, а для исследования рёбер удобнее — каркасную, на которой можно увидеть все рёбра тела и их расположение. Учащиеся и сами могут изготавливать модели многогранников, например, из элементов конструктора или палочек, скреплённых кусочками пластилина, и т. д.

Полезно также предлагать учащимся задания на сравнение различных многогранников. Например:

1) Среди предложенных многогранников найти многогранник, у которого число вершин (рёбер, граней) наименьшее. Это треугольная пирамида.

2) Найти два разных многогранника с одинаковым числом вершин. Это могут быть параллелепипед и семиугольная пирамида.

3) Найти все многогранники, грани которых — прямоугольники.

Умение правильно воспринимать плоские изображения пространственных объектов весьма важно. Чтобы постепенно подвести учащихся к восприятию абстрактного чертежа, на котором изображаются лишь линии пересечения поверхностей (сплошными линиями — видимые, штриховыми — невидимые), на первых этапах используются прозрачные изображения тел, так как они более реальны, их нетрудно представить. Далее может быть предложена следующая *практическая работа*.

К доске прикрепляются вырезанные из цветной бумаги две фигуры — красный круг и зелёный треугольник (рис. 25, а). Учащимся предлагается воспроизвести эту конфигурацию в тетради (при этом удобно использовать трафареты):

1) начертите круг;

2) сверху начертите треугольник;

3) раскрасьте треугольник;

4) раскрасьте видимую часть круга;

5) невидимую часть круга обведите штриховой линией.

Учащиеся получают изображение, показанное на рисунке 25, *б*. Далее на доске круг и треугольник меняются местами, и учащимся предлагается воспроизвести эту конфигурацию, но уже не используя цветные карандаши. После этого можно попросить определить по чертежу (рис. 26), какая фигура расположена сверху.

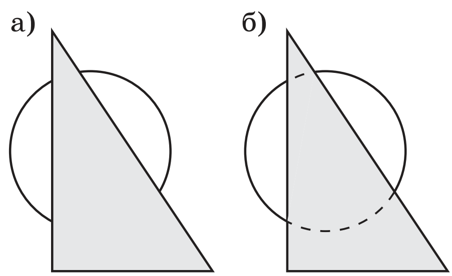


Рис. 25

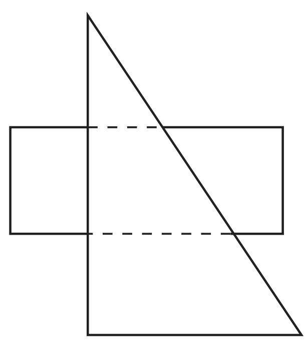


Рис. 26

И наконец, каждый ученик может, используя имеющиеся у него трафареты, изобразить на бумаге собственную конфигурацию из двух фигур и предложить соседу по парте раскрасить фигуры в соответствии с их расположением.

Полезно научить учащихся изображать куб на клетчатой бумаге (рис. 27). Овладев этим умением, учащиеся смогут также рисовать различные многогранники, составленные из кубиков (рис. 28).

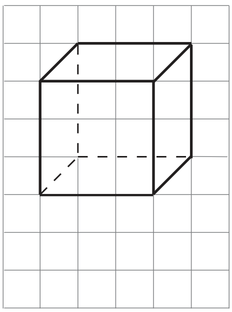


Рис. 27

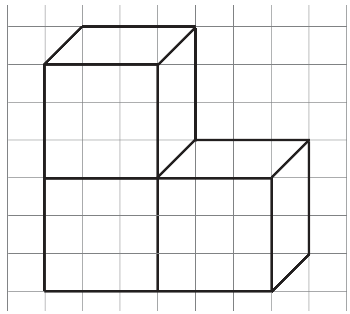


Рис. 28

Обращаем внимание учителя на то, что если учащийся сначала изображает контур тела, а уже затем линии, лежащие внутри контура, то это значит, что он испытывает трудности в восприятии пространственных тел, не видит особенностей их строения. Такому ученику необходимо дополнительно предложить упражнения типа **926** из учебника.

В качестве *дополнительных упражнений* предлагается найти на рисунках в учебнике:

а) многогранник, у которого 5 граней, 5 вершин, 8 рёбер;

б) два различных многогранника, имеющих 6 вершин;

в) два различных многогранника с 5 гранями;

г) многогранник, у которого столько же граней, вершин и рёбер, сколько их у куба.

Комментарий к упражнениям

927. Для каждой грани следует использовать свой цвет.

929. Все вопросы и задания этого упражнения относятся к большему многограннику. Вернуться к этой задаче можно после рассмотрения п. 10.4, задав учащимся вопрос: «Каким многогранником является отрезанный угол куба?»

930. Обычно учащиеся выполняют это задание так: сплошные линии изображают штриховыми линиями, а штриховые — сплошными, забывая при этом, что линии контура должны оставаться сплошными. Здесь полезно отослать их к упражнению **926**, в ходе выполнения которого проводился анализ того, в каких случаях грань будет иметь видимые рёбра.

931. Начать движение следует либо в вершине B, либо в вершине E, в которых сходятся по три ребра. Закончится обход соответственно в вершине E или в вершине B.

932. Сначала надо увидеть квадрат $ABCD$, а затем квадраты $AKCE$ и $KBED$.

10.2. Параллелепипед

Методический комментарий

Каким бы простым телом ни казался нам параллелепипед, учащимся требуется определённое время на знакомство с ним. Каждый ученик должен иметь на уроке и дома какую-нибудь модель параллелепипеда. При этом важно, чтобы учащиеся не просто рассматривали параллелепипед, но и задействовали при его изучении и другие виды восприятия. Так, они должны не только глазами, но и пальцами провести по его рёбрам, ощутить, что в каждой вершине сходятся три ребра. Взяв параллелепипед в руки так, чтобы в каждой его вершине оказалось по одному пальцу, они увидят и ощутят тактильно, что число задействованных пальцев равно 8, следовательно, у параллелепипеда 8 вершин. Аналогично можно сосчитать и число его граней. Такое использование при восприятии тела различных органов чувств помогает создать более полный его мысленный образ.

Результатом подобного изучения параллелепипеда должно стать осознание целого ряда его особенностей. Все грани параллелепипеда — прямоугольники, и всего их шесть; напротив друг друга расположены равные грани, таких пар равных граней три; в каждой вершине сходятся три неравные грани. Аналогичные выводы можно сделать и о рёбрах: всего у параллелепипеда двенадцать рёбер; есть равные рёбра — три группы по четыре ребра; в каждой вершине сходятся три ребра разной длины. Наконец, вершины: их у параллелепипеда 8, по четыре вершины в каждой из противолежащих граней. Такое всестороннее и внимательное изучение параллелепипеда, однако, не предполагает, что предлагаемые далее задания выполняются учащимися в умственном плане без опоры на модели и рисунки. Так, например, при выполнении упражнения **952** из учебника можно предложить учащимся воспользоваться спичечным коробком, на котором равные рёбра обведены одним цветом (упражнение **938**), а можно отослать к рисунку, на котором изображены аквариумы. Этот же спичечный коробок полезно использовать при решении других задач.

Особенностью данного пункта является комбинированный характер большинства рассматриваемых задач, который заключается не только в активной работе пространственного воображения, но и в привлечении изученных ранее понятий в новых ситуациях и сочетаниях: ломаная, составленная из рёбер куба, периметр грани, площадь поверхности и др. Это создаёт определённые сложности для учащихся, поэтому выполнение таких упражнений требует дополнительных комментариев и разъяснений учителя.

Начать работу по изучению материала, связанного с развёртками, необходимо с практической деятельности: изготовления развёртки и сворачивания её в пространственное тело. Важно при этом обращать внимание учащихся на сам процесс сворачивания, на то, какие грани оказались противоположными, а какие — соседними, какие отрезки и точки совместились. Полезно снабдить учащихся и теми фигурами, которые не могут быть развёртками, дать им возможность попытаться обнаружить это практическим путём и самостоятельно найти причину. Приобретя такой значительный опыт сворачивания развёрток, дальнейшие упражнения учащиеся смогут уже выполнять мысленно, либо вспоминая, как они сворачивали данную развёртку, если она им уже встречалась, либо по аналогии с этим, если встречаются с ней впервые. В любом случае учитель должен подстраховать тех учащихся, которым пока это сделать трудно, и снова, дав им развёртку в руки, вернуться к практическому способу решения предложенной задачи. Переход от практического решения к мысленному должен осуществляться постепенно, с учётом индивидуального развития учащихся.

Комментарий к упражнениям

948. При выполнении заданий 2—4 кубики можно использовать для проверки действий, выполненных мысленно. Однако в слабом классе эти задания полезно выполнить практически.

950. Всего кубиков 27. Одну окрашенную грань имеют кубики, расположенные в центре каждой грани большого куба; их 6. Две окрашенные грани имеют кубики, расположенные в двух гранях куба; их $4 \cdot 6 : 2 = 12$. Три окрашенные грани у кубиков, расположенных в вершинах куба; их 8. Итого окрашенных кубиков $6 + 12 + 8 = 26$. Значит, один кубик останется неокрашенным; он расположен в центре куба.

954. Задание «мысленно сверните куб» может оказаться для учащихся достаточно сложным. В этом случае выполнение задания может быть организовано следующим образом. Предварительно предложить учащимся вырезать из бумаги развёртки 1 и 2. Развёртку 3 вырезать из листа ватмана.

Развёртка 1 сворачивается практически. Затем предложить учащимся, держа развёртку 2 в руках, свернуть её мысленно, после чего проверить правильность полученного решения практическим сворачиванием. Демонстрируя учащимся развёртку 3, снова предложить им мысленно свернуть развёртку, после чего свернуть её в куб. Развёртка 4 сворачивается мысленно по рисунку в учебнике. Учащимся, допустившим ошибку, предложить дома вырезать развёртку из бумаги и свернуть из неё куб.

955. Важно не только определить, какие буквы находятся на каких квадратах развёрток, но и как они расположены друг относительно друга (рис. 29).

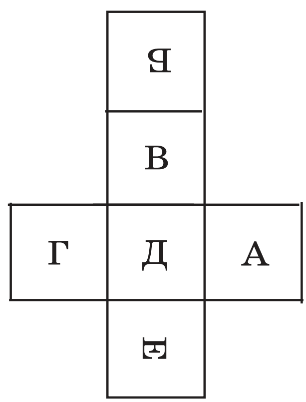


Рис. 29

Несколько комментариев к заданиям из рабочей тетради.

При выполнении заданий из рабочей тетради, связанных с изображением и чтением изображений, необходимо использовать модели. Модель куба надо расположить перед учащимися так, как показано на рисунке в рабочей тетради.

Чтобы представить заданный параллелепипед в ином расположении, рассуждать можно так: так как ребро LN является видимым, то видимы будут и грани $LNMA$, $LNTC$, а также грань $ABCL$. Рёбра этих граней обводим сплошными линиями, остальные — штриховыми.

Изображение параллелепипеда выполняется от руки.

10.3. Объём параллелепипеда

Методический комментарий

Начать изучение пункта «Объём параллелепипеда» полезно с напоминания о том, как измеряют длины и площади (выбор единицы измерения и др.).

Вывод правила вычисления объёма параллелепипеда аналогичен выводу правила вычисления площади прямоугольника, поэтому сначала полезно повторить вывод этого правила. Заметим, что очень важно сопроводить вывод правила нахождения объёма параллелепипеда практическим выполнением учащимися описанных в учебнике действий. Полезно дать каждому учащемуся возможность повторить эти действия самостоятельно, проговаривая и поясняя их. Эти действия по заполнению пространства кубиками следует постепенно перевести в умственный план. Необходимость в них со временем отпадёт и, сохраняя идею измерения пространства, учащиеся смогут сначала перейти к правилу вычисления объёма параллелепипеда, а позднее и к формуле. Этим и определяется значительная доля заданий с кубиками, в которых требуется изобразить тело заданного объёма, сложить (мысленно или практически) параллелепипед и определить его измерения, по изображению определить число кубиков, вошедших в коробку, и т. д. Кроме того, эти упражнения прекрасно развивают пространственное воображение: умение представить фигуру по её описанию или изображению, выполнить с ней заданные действия.

Учащиеся должны уметь приблизительно представлять 1 см^3, 1 дм^3, 1 м^3, знать, что 1 дм^3 = 1 л, представлять объёмы некоторых сосудов (например, объём стакана равен $\frac{1}{4}$ л = 250 мл = 250 см^3, объём ведра равен приблизительно 10 л, объём чайной ложки — 5 см^3, или 5 мл).

Перевод одних единиц в другие должен опираться на знание линейных метрических зависимостей. Полезно, если учащиеся сами составят таблицу зависимостей между основными единицами объёма и будут пользоваться ею в дальнейшем при выполнении упражнений.

Комментарий к упражнениям

971. Полезно обсудить два варианта решения задачи:

1) вычислить объёмы, заполненные водой;

2) вычислить объёмы, оставшиеся незаполненными.

973. Здесь нужно мысленно укладывать пакеты в коробку, а вычислив необходимые объёмы, можно оценить результат.

10.4. Пирамида

Методический комментарий

Пирамида — один из самых важных и интересных многогранников. И учащиеся этого возраста должны уметь её распознавать на моделях и графических изображениях. Методика изучения пирамиды аналогична методике, предложенной для изучения параллелепипеда.

Обращаем внимание учителя на то, что здесь не подразумевается вывод зависимости числа вершин и рёбер n-угольной пирамиды от числа n вершин основания. Но в результате изучения, анализа различных пирамид у учащихся должно сложиться подкреплённое зрительными образами понимание того, что число вершин пирамиды на единицу больше числа вершин в её основании, рёбер боковых граней столько же, сколько их в основании, число боковых граней равно числу сторон основания, все боковые грани сходятся к вершине, противолежащей основанию, а следовательно, само название пирамиды помогает узнать, сколько у неё вершин, рёбер и граней.

Комментарий к упражнениям

987. Задание выполняется с пирамидой в руках.

993. Многогранник можно вылепить из пластилина и разрезать его.

994. 2) См. рисунок 30.

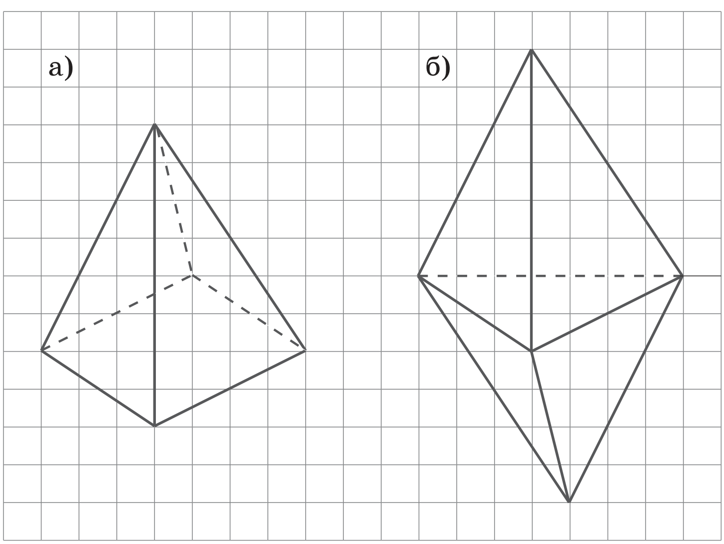


Рис. 30

В рабочей тетради есть задание о перекатывании пирамиды с одной грани на другую. Необходимо предусмотреть возможность практического решения. Учащиеся должны подметить закономерность: третьей будет вершина, отсутствующая в предыдущем треугольнике. Ребро BD общее для граней BCD и BDA, значит, первая непроставленная вершина — вершина A, затем последовательно вершины C и B.

Глава 11. Таблицы и диаграммы (9 уроков)

Повторение материала курса 5 класса (10 уроков)

Примерное поурочное планирование учебного материала

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Характеристика основных видов деятельности учащихся
11.1. Чтение и составление таблиц	3	346—348 (ч. 2)	**Знакомиться** с различными видами таблиц. **Анализировать** готовые таблицы, **извлекать** из них **информацию; сравнивать** между собой представленные в таблицах данные из реальной практики; **выполнять вычисления** по табличным данным. **Заполнять** простые таблицы, следуя инструкции
11.2. Диаграммы	2	349—351 (ч. 2)	**Знакомиться** с такими видами диаграмм, как столбчатые и круговые диаграммы. **Анализировать** готовые диаграммы; **сравнивать** между собой представленные на диаграммах данные, характеризующие некоторое реальное явление или процесс, **выполнять вычисления** по данным диаграммы. **Строить** в несложных случаях простые столбчатые диаграммы, следуя образцу
11.3. Опрос общественного мнения	2	352—354 (ч. 2)	**Знакомиться** с примерами опроса общественного мнения и простейшими способами представления данных. **Проводить** несложные **исследования** общественного мнения, связанные с жизнью школы, внешкольными занятиями и увле-

Пункт учебника	Число уроков	Рабочая тетрадь, номер задания	Характеристика основных видов деятельности учащихся
			чениями одноклассников: **формулировать** вопросы, **выполнять** сбор информации, **представлять** её в виде таблицы и столбчатой диаграммы
Обзор и контроль	2	**Анализировать** данные опросов общественного мнения, представленные в таблицах и на диаграммах, строить столбчатые диаграммы	
Повторение материала курса 5 класса	10		

О с н о в н ы е ц е л и: сформировать умения извлекать необходимую информацию из несложных таблиц и столбчатых диаграмм.

О б з о р г л а в ы. Здесь начинается формирование умения работать с информацией, представленной в форме таблиц и диаграмм, которые широко используются в средствах массовой информации, справочной литературе и т. д. Наряду с этим у учащихся формируются первоначальные представления о приёмах сбора необходимых данных, предъявлении этих данных в компактной табличной форме и наглядном изображении в форме столбчатой диаграммы. На примере опроса общественного мнения учащиеся знакомятся с основными этапами проведения социологических опросов. Однако главным при этом является формирование умения анализировать готовые таблицы и диаграммы и делать соответствующие выводы.

М а т е р и а л ы д л я к о н т р о л я.

Учебное пособие «Контрольные работы»: Контрольная работа № 7 «Многогранники. Повторение материала курса 5 класса».

11.1. Чтение и составление таблиц

Методический комментарий

Объяснение материала начинается с рассмотрения знакомой учащимся страницы классного журнала с отметками по математике за октябрь. Информация об отметках представлена в виде таблицы с двумя входами — фамилии учащихся и даты учебных занятий за месяц. Вводятся термины, связанные с использованием табличной формы представления данных: строка, столбец. В процессе выполнения упражнений у учащихся формируется умение извлекать информацию, заключённую в клетке таблицы, в строке, в столбце, в части строки или части столбца. Кроме того, школьники учатся анализировать табличную информацию и делать на этой основе соответствующие выводы.

При рассмотрении несложных жизненных ситуаций учащиеся знакомятся с приёмами составления таблиц и условными обозначениями, которые принято использовать при их построении.

Объяснение начинается с рассмотрения так называемой частотной таблицы, но сам термин не вводится (пример 1 из объяснительного текста учебника).

В ходе выполнения упражнений учащиеся познакомятся с частотной таблицей, в которой значения величины записаны в виде числового интервала (упражнение **1003**). Учащиеся узнают о том, что такие таблицы позволяют экономно представить информацию, когда рассматриваемая величина имеет много значений.

При рассмотрении таблицы с результатами шахматного турнира (пример 2 из объяснительного текста) учащиеся получают представление об общих приёмах составления турнирных таблиц, а также о принятой в шахматах системе присвоения баллов участникам игры и приёмах записи результатов игр в клетки таблицы.

Формирование умения строить частотные или турнирные таблицы не является обязательной учебной целью. Главное — это показать учащимся, как заполняются клетки таблицы, и тем самым облегчить понимание информации, представленной в готовых таблицах.

Выполняя упражнения, учащиеся знакомятся также с так называемыми пиктограммами (от английского слова *picture* — картина), в которых для обозначения численности предметов используются различные картинки (см. таблицу в упражнении **1004**). Эти картинки могут быть связаны по смыслу с изображаемой ими информацией, как это сделано, например, в задании 2 рубрики «Чему вы научились».

Комментарий к упражнениям

1002. При выполнении этого упражнения рассматривается один из приёмов, позволяющих увеличить объём информации, представленной в таблице: формирование итоговой строки, в которой суммируются данные по каждому из столбцов таблицы, и итогового столбца, в котором суммируются данные по каждой из строк. Учащиеся убеждаются в том, что сумма данных итоговой строки такая же, как сумма данных итогового столбца. Целесообразно обратить внимание учащихся на то, что сравнение этих сумм позволит проверить правильность заполнения итоговой строки и итогового столбца конкретной таблицы.

11.2. Чтение и построение диаграмм

Методический комментарий

В данном пункте изучается новая форма изображения информации — диаграммы. Учащиеся должны получить представление о том, что диаграмма является не только компактной, но и наглядной формой представления количественной информации. Особенно удобно её использовать в тех случаях, когда ставится цель сравнить между собой данные, характеризующие некоторое явление или процесс.

Учащиеся знакомятся с несложными столбчатыми диаграммами, а также с их разновидностью — линейными диаграммами. Круговые диаграммы приводятся только в ознакомительном плане, их изучение планируется в 6 классе.

При изучении данного пункта основная задача — дать учащимся опыт чтения диаграмм, получения из диаграммы нужной информации. Умение строить диаграммы на данном этапе не входит в обязательные требования. Это достаточно сложное умение, которое учащиеся будут приобретать по мере изучения курса; здесь же задание, связанное с построением столбчатой диаграммы, отнесено к уровню **Б**.

11.3. Опрос общественного мнения

Методический комментарий

Изучение данного материала позволит учащимся получить первоначальные представления о методике проведения опроса общественного мнения. Опыт преподавания в школе показывает, что предложенные в учебнике темы для опросов можно использовать для организации самостоятельных исследований, посильных для пятиклассников.

При проведении этих исследований можно использовать очень эффективную форму работы нескольких человек над одной и той же проблемой — работу в малых группах. Эти группы составляются по желанию учащихся или по выбору учителя. Участники такой группы сами распределяют работу, собирают данные, представляют их в удобной для интерпретации форме и делают выводы. В более слабом или малоинициативном классе опросы можно провести прямо на уроке под руководством учителя. Важным в этой работе является формирование у учащихся умения делать выводы и принимать соответствующие решения.

Приложение[1]

Дополнительные материалы для занятий с учащимися

Приложение включает в себя несколько работ — математических сюжетов, доступных школьникам 10—11 лет и направленных на углубление и расширение знаний учащихся, знакомство с новыми математическими идеями, обогащение историко-культурологических представлений. Каждая работа состоит из объяснительного текста, разбитого на небольшие фрагменты. Эти фрагменты сопровождаются заданиями, позволяющими осознать прочитанное, самостоятельно выполнить описанные действия, решить задачу, аналогичную разобранной. По стилю изложения работы адресованы ученику. Содержащиеся в тексте вопросы и задания последовательно организуют и направляют его деятельность, позволяют двигаться от простого к сложному, от наблюдений к построению обобщений, самостоятельному поиску решений.

Такого рода материалы можно использовать для различных целей: на внеклассных занятиях, для индивидуальной работы со школьниками, проявляющими интерес к занятиям математикой, а также, если время и уровень подготовки класса позволяют, на уроках, занимаясь со всеми учащимися. При этом в любом случае можно не рассматривать работу целиком, а ограничиться лишь её частью.

Дополнительные материалы не включены в тематическое планирование — учитель может обращаться к ним в любое время по своему усмотрению. При этом следует иметь в виду, что если для понимания работы требуются какие-то конкретные знания, то, естественно, следует предложить её учащимся после прохождения соответствующей темы курса.

1. Обводим линии и обходим мосты

Где начать движение? Попробуем линию, изображённую на рисунке 1, *а*, обвести *одним росчерком*, т. е. не отрывая карандаша от листа бумаги и не проходя по одной и той же части линии более одного раза.

[1] Представленный материал можно предлагать учащимся как в 5, так и в 6 классе.

Фигура эта, такая простая на вид, оказывается, имеет интересную особенность. Если мы начнём движение из узла B, то у нас это обязательно получится. Один из вариантов обводки показан на рисунке 1, *б*.

А что будет, если мы начнём движение из узла A? Легко убедиться, что обвести линию в этом случае не удастся — у нас всегда будут оставаться не пройденные отрезки, добраться до которых уже невозможно. Две неудачные попытки обводки показаны на рисунках 1, *в*, *г*.

1. а) Удастся ли обвести одним росчерком линию, изображённую на рисунке 1, *а*, если начать движение из узла C? из узла D?

   б) Вы начали движение из узла B. Где вы закончите движение?

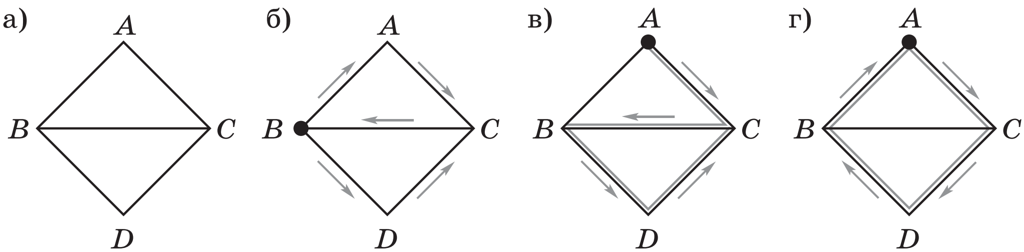


Рис. 1

2. 1) Назовите все узлы линии, изображённой на рисунке 2, *а*, начав с которых её можно обвести одним росчерком. Начертите в тетради эту линию одним росчерком, отметьте начало движения и покажите стрелками направление движения.

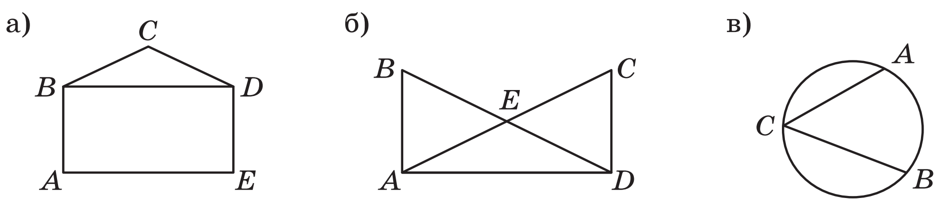


Рис. 2

   2) Выполните такое же задание для фигур, изображённых на рисунках 2, *б* и 2, *в*.

3. На рисунке 3 изображена линия, которую вы, наверное, умеете рисовать одним росчерком. Это звезда. Оказывается, хотя она и выглядит значительно более сложной, чем предыдущие линии, обве-

сти её можно, причём начав с любого узла. Начертите звезду несколько раз, начиная движение из разных узлов.

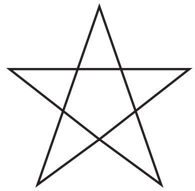


Рис. 3

4. Линию, изображённую на рисунке 4, как и звезду, можно вычертить одним росчерком, начав движение из любого узла. Вычертите эту линию дважды: начав с узла, из которого выходит два отрезка, а затем с узла, из которого выходят четыре отрезка.

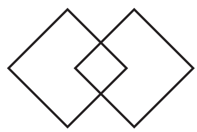


Рис. 4

5. Начертите одним росчерком линию, изображённую на рисунке 5.

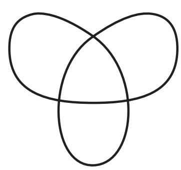


Рис. 5

«Неудачный» обход. А теперь попробуйте обвести одним росчерком линию, изображённую на рисунке 6. Вам это сделать не удалось! Почему? Вы не смогли найти нужный узел? Нет! Дело в том, что это вообще невозможно.

Рис. 6

Проведём рассуждения, которые убедят нас в этом.

Рассмотрим узел A. Начнём обводить линию с этого узла. Из него выходят три отрезка. Чтобы пройти по каждому из этих отрезков, мы должны выйти из узла A по одному из них, в процессе обводки обязательно вернуться в него по другому отрезку и тут же выйти по третьему. А вот снова войти в этот узел мы уже не сможем! Значит, если начать движение из узла A, то закончить в нём не удастся.

Допустим теперь, что узел A не является началом. Тогда в процессе обводки мы должны войти в него по одному из отрезков, выйти по другому и снова вернуться по третьему. А так как выйти из него мы уже не сможем, то узел A в этом случае должен являться концом.

Итак, узел A должен быть или начальным, или конечным узлом вычерчивания.

Но про три других узла нашей линии можно сказать то же самое. Однако как начальным узлом, так и конечным может быть только один из этих узлов. А значит, обвести эту линию одним росчерком невозможно.

Линию нельзя обвести одним росчерком, если она содержит более двух узлов, в которых сходится нечётное число отрезков.

6. а) Какие из линий, изображённых на рисунке 7, можно обвести одним росчерком, а какие — нельзя?

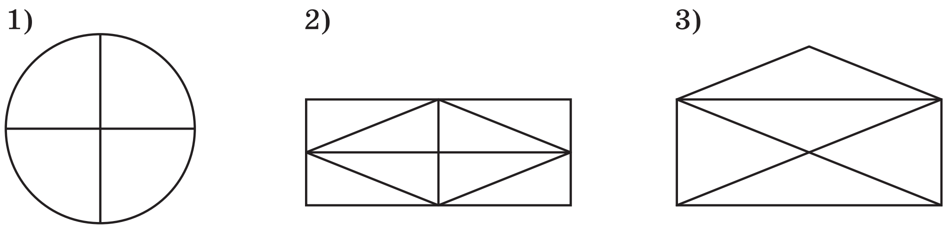


Рис. 7

б) Есть ли среди орнаментов, изображённых на рисунке 8, такой, который нельзя обвести одним росчерком?

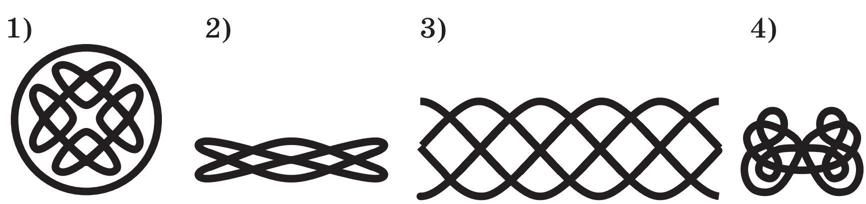


Рис. 8

7. Вспомните, как вы учились писать по прописям. Некоторые буквы вы писали, не отрывая карандаша от бумаги, другие же — нет. Какие из букв, изображённых на рисунке 9, можно написать одним росчерком? Придумайте свой способ написания букв Б, К, Ф, при котором их можно вычертить одним росчерком.

Рис. 9

8. А теперь «выйдем» в пространство.

   1) Можно ли согнуть каркас куба (рис. 10) из единого куска проволоки?

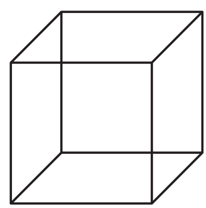


Рис. 10

   2) Можно ли сделать такой каркас из двух кусков проволоки, спаяв их в нескольких узлах? А из трёх кусков?

Задача о кёнигсбергских мостах. Наверное, вы удивитесь, узнав, что начало вычерчиванию линий одним росчерком положила задача, которую обычно называют задачей о кёнигсбергских мостах. Город Кёнигсберг (ныне это российский город Калининград) был расположен на берегах и двух островах реки Преголь. Четыре части города были соединены семью мостами.

Совершая прогулки в воскресные дни, горожане долго спорили, как пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды. Многие пытались решить эту задачу не только во время прогулок, но и теоретически, но доказать или опровергнуть возможность существования такого маршрута никто не мог. Долго бы продолжались эти споры жителей города, если бы через Кёнигсберг не проезжал великий немецкий и российский математик Леонард Эйлер. Это было в 1736 году. Он заинтересовался спором и разрешил его. Ответ на вопрос горожан был таким: невозможно пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды.

Чтобы найти решение задачи, он пришёл к схематическому рисунку, который получил название графа. На рисунке 11 изображены два схематических рисунка кёнигсбергских мостов, на которых берега реки обозначены буквами A и D, острова — буквами B, C. На рисунке 11, *б* берега и острова заменены точками, а мосты — линиями. Это и есть граф кёнигсбергских мостов. Используя его, решите задачу о кёнигсбергских мостах и вы.

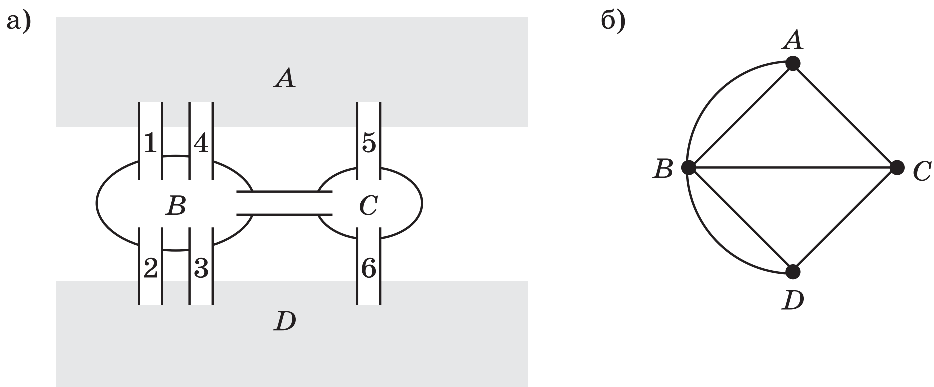


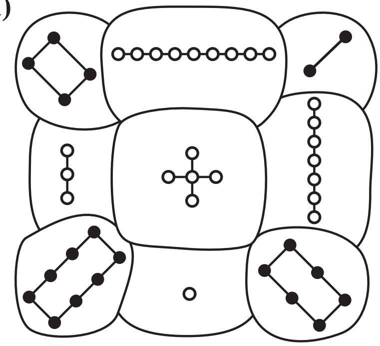
Рис. 11

Созданная Эйлером теория графов нашла очень широкое применение в транспортных и коммуникационных системах, например, для составления оптимальных маршрутов доставки грузов или определения маршрута следования данных в Интернете.

2. Магические квадраты

Что такое «магический квадрат». Существует предание, согласно которому китайский император Ию, живший примерно 4 тысячи лет назад, увидел однажды на берегу реки священную черепаху с узором из чёрных и белых кружков на панцире (рис. 1, *а*). Сообразительный император сразу понял смысл этого рисунка. Чтобы и нам он стал понятен, заменим каждую фигуру числом, показывающим, сколько в ней кружков; получим таблицу, изображённую на рисунке 1, *б*.

а)



б)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 1

Если сложить числа первой строки этой таблицы, то получится 15:

$$4 + 9 + 2 = 15.$$

Точно такой же результат получается, если сложить числа второй, а также третьей строки:

$$3 + 5 + 7 = 15, \quad 8 + 1 + 6 = 15.$$

При сложении чисел любого столбца тоже получается 15:

$$4 + 3 + 8 = 15, \quad 9 + 5 + 1 = 15, \quad 2 + 7 + 6 = 15.$$

Этот же результат получается и при сложении чисел по диагонали:

$$4 + 5 + 6 = 15, \quad 8 + 5 + 2 = 15.$$

Такие числовые таблицы, вписанные в квадратную сетку, называют *магическими квадратами*. Магические квадраты почитались не только в Древнем Китае. Во времена Средневековья в Европе свойства магических квадратов тоже считались волшебными. Магические квадраты служили талисманами.

1. Впишите в пустые клетки квадрата такие числа, чтобы он стал магическим:

а)

2		6
	5	1
4		

б)

18		14
	15	
16		

2. Восстановите магические квадраты:

а)

3		15	14
13	16		
10	11		
8		12	9

б)

		14	11
	15	8	10
16	2	9	
13	12		

Магический квадрат на гравюре Дюрера. Знаменитый магический квадрат изображён на гравюре великого немецкого художника Альбрехта Дюрера «Меланхолия» (рис. 2). Этот квадрат, составленный из чисел, записанных арабскими цифрами (рис. 3), выглядит так, как показано на рисунке 4. Он считается самым ранним в европейском искусстве.

Интересно, что средние числа в нижней строке квадрата изображают год создания гравюры — 1514. Возможно, что Дюрер знал этот квадрат; а может быть, начав именно с этих чисел, смог подобрать остальные.

Рис. 2. А. Дюрер. Меланхолия. Гравюра на меди, 1514 г.

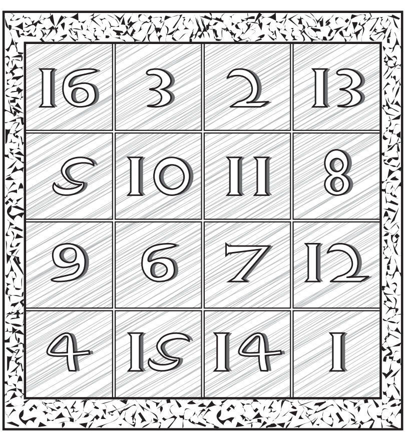


Рис. 3

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 4

3. Убедитесь сами, что квадрат Альбрехта Дюрера является магическим. Посчитайте суммы по строкам, столбцам и диагоналям квадрата. Какой результат у вас получился?
4. Исследуйте другие свойства этого квадрата, посчитав сумму чисел:
   а) центрального квадрата;
   б) каждого из угловых квадратов;
   в) в квадрате из угловых клеток.

Учимся составлять магические квадраты. Составим, например, свой магический квадрат из чисел от 1 до 9. Для этого можно попробовать перебрать различные варианты расстановки чисел от 1 до 9 в клетках таблицы. Если повезёт, вы получите магический квадрат. Однако при этом надо иметь в виду, что всего существует почти 400 000 разных расстановок чисел в этом квадрате. Поэтому такой магический квадрат надо попытаться составить с помощью *рассуждений*.

Сумма всех чисел от 1 до 9 равна 45. Всего в квадрате три строки. Значит, в каждой строке магического квадрата сумма чисел должна быть равна $45 : 3 = 15$. Но тогда, чтобы квадрат был магическим, в каждом столбце и на каждой диагонали сумма чисел тоже должна быть равна 15.

Выпишем все возможные представления числа 15 в виде суммы трёх слагаемых от 1 до 9:

$9 + 5 + 1$	$8 + 6 + 1$	$7 + 6 + 2$	$6 + 5 + 4$
$9 + 4 + 2$	$8 + 5 + 2$	$7 + 5 + 3$	
	$8 + 4 + 3$		

Прежде всего заметим, что число, стоящее в центре таблицы, должно встречаться в выписанных суммах *четыре* раза (столбец, строка и две диагонали). Каждое число, стоящее в углу таблицы, должно встречаться в суммах *три* раза (строка, столбец, диагональ). А число, стоящее в одном из оставшихся четырёх мест, должно встречаться в суммах только *два* раза (строка и столбец).

Теперь будем вписывать числа в квадрат (приготовьте его в тетради).

Поскольку в полученных суммах четыре раза встречается только число 5, то оно и должно стоять в центре таблицы (впишите его в таблицу).

Трижды встречаются в суммах числа 2, 4, 6 и 8. Значит, они должны стоять в углах таблицы, причём так, чтобы 2 и 8 были на одной диагонали (2 + 5 + 8 = 15), а 4 и 6 — на другой (впишите их каким-либо способом).

Дважды в суммах встречаются числа 1, 3, 7 и 9. Их нужно поставить на свободные места, учитывая при этом, что сумма чисел в каждой строке должна быть равна 15.

Описанный способ даёт возможность получить несколько разных магических квадратов. Например, число 8 можно расположить в любом из четырёх углов, что позволит получить разные по виду квадраты.

5. Составьте самостоятельно ещё один магический квадрат из чисел от 1 до 9.
6. Возьмите квадрат 4 × 4 и впишите в него числа от 1 до 16 по порядку, двигаясь по строкам слева направо. Теперь поменяйте местами числа, стоящие в противоположных углах квадрата. Затем поменяйте местами числа, стоящие в противоположных углах центрального квадрата. Если вы всё сделали правильно, должен получиться магический квадрат. Проверьте.

3. Фигурные числа

Знакомимся с треугольными числами. Великий древнегреческий учёный Пифагор, родившийся в VI в. до н. э., и его ученики считали главной из всех наук арифметику — науку о числах. Изучение чисел у пифагорейцев было тесно связано с геометрическими фигурами. Они изображали числа в виде совокупности точек, образующих треугольники, квадраты и т. д. И со времён Пифагора стали использоваться такие названия, как «треугольные числа», «квадратные числа».

Какие же числа называют треугольными? Посмотрите на рисунок 1. На нём изображена последовательность равносторонних треугольников, составленных из одинаковых шариков. Каждый шарик — это единица; сколько шаров в треугольнике, столько и единиц в числе. Числа, показывающие, сколько шаров содержится в этих треугольниках, и называют *треугольными*.

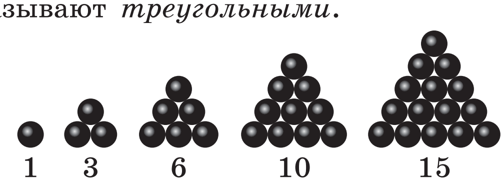


Рис. 1

На рисунке 1 изображены первые пять треугольных числе: 1, 3, 6, 10, 15. Чтобы изобразить шестое число, надо к пятому треугольнику пририсовать ещё один ряд (в нём будет 6 шаров); чтобы получить седьмое треугольное число, надо пририсовать следующий ряд к шестому треугольнику (в нём будут 7 шаров) и т. д.

1. Изобразите в тетради в виде треугольников первые 8 треугольных чисел, а затем выпишите эти числа в ряд одно за другим.

Как образуются треугольные числа? Находить одно за другими треугольные числа можно и не рисуя треугольники. Достаточно понять правило, по которому каждое следующее число получается из предыдущего.

Посмотрите ещё раз на рисунок 1. Чтобы изобразить второй треугольник, мы пририсовали к первому 2 шара, т. е. второе треугольное число получается из первого прибавлением 2 единиц. Чтобы изобразить третий треугольник, мы пририсовали ко второму 3 шара, т. е. третье треугольное число получается из второго прибавлением 3 единиц. Точно так же, чтобы получить четвёртое число, надо к третьему прибавить 4 единицы; чтобы получить пятое число, надо к четвёртому прибавить 5 единиц и т. д. (рис. 2). И вообще, *чтобы получить число, которое в ряду треугольных чисел стоит под номером n, надо к предыдущему числу прибавить n единиц.*

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15$$

Рис. 2

2. Первые пять треугольных чисел — это 1, 3, 6, 10, 15. Как, пользуясь сформулированным правилом, найти шестое треугольное число? Как, зная шестое число, найти седьмое? Продолжите последовательность треугольных чисел, приписав числа с номерами от 6 до 15.

3. Заполните таблицу:

Номер числа	17	18	19	20	21	22	21	24	25
Треугольное число				210					

Ещё одно правило нахождения треугольных чисел. А можно ли найти какое-нибудь треугольное число, не вычисляя всех предыдущих? Попробуем, например, найти иначе треугольное число под номером 10.

Обратимся опять к изображению треугольных чисел в виде равносторонних треугольников. Понятно, что десятое треугольное число изображается в виде треугольника с 10 рядами, в которых содержится 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 шаров. Поэтому десятое треугольное число равно

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55.$$

Вообще, *треугольное число с номером n равно сумме последовательных натуральных чисел от 1 до n.*

Например, треугольное число с номером 200 равно сумме

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 198 + 199 + 200.$$

Чтобы найти эту сумму, вы можете воспользоваться известным вам «методом Гаусса». Получите число 20 100.

Но можно рассуждать немного иначе. Запишем искомую сумму дважды, расположив слагаемые так, как показано ниже:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 198 & + & 199 & + & 200 \\ 200 & + & 199 & + & 198 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1. \end{array}$$

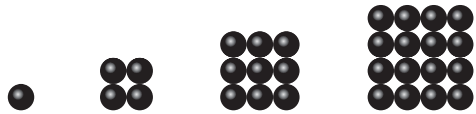
Сумма каждой пары чисел, расположенных друг под другом, равна 201. Всего таких пар 200. Поэтому искомое треугольное число равно

$$(201 \cdot 200) : 2 = 20\,100.$$

(Объясните, почему мы должны были произведение $201 \cdot 200$ разделить на 2.)

4. а) Шары уложили в равносторонний треугольник, в котором 25 рядов. Сколько потребовалось шаров?
   б) Чему равно треугольное число с номером 35? с номером 50? с номером 1000?
5. Является ли треугольным число 64? число 91?
6. В каком порядке идут чётные или нечётные числа в последовательности треугольных чисел? Чётным или нечётным является число с номером 17, 18, 19, 20? Чётным или нечётным является число с номером 60, 78?
7. Представьте число 35 в виде суммы нескольких треугольных чисел. Сделайте рисунок.

Поговорим о квадратных числах. Легко догадаться, что если треугольные числа изображаются в виде треугольников, то квадратные — в виде квадратов. На рисунке 3 изображены первые четыре *квадратных числа* — это 1, 4, 9, 16.



1 $\quad 4 = 2^2 \quad 9 = 3^2 \quad 16 = 4^2$

Рис. 3

8. а) Запишите в тетради первые десять квадратных чисел.
   б) Найдите двадцатое, двадцать пятое и сороковое квадратные числа.
9. Представьте число 30 в виде суммы нескольких квадратных чисел.

Два правила получения квадратных чисел. Наверное, вы уже поняли правило, по которому можно найти любое квадратное число по его номеру. В самом деле:

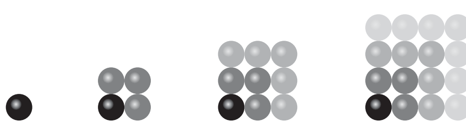
$$1 = 1^2, \quad 4 = 2^2, \quad 9 = 3^2, \quad 16 = 4^2, \quad 25 = 5^2 \text{ и т. д.}$$

Вообще, *чтобы найти квадратное число, которое в ряду квадратных чисел стоит под номером n, надо этот номер возвести в квадрат*.

Вы видели, что треугольные числа получаются суммированием последовательных натуральных чисел. И квадратные числа тоже получаются суммированием.

Квадраты на рисунке 3 изображают последовательность чисел 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 и т. д. А из рисунка 4 видно, что эти же квадраты изображают последовательность чисел, которые получаются по следующему правилу:

$$1, \quad 1 + 3, \quad 1 + 3 + 5, \quad 1 + 3 + 5 + 7 \text{ и т. д.}$$



1 $\quad$ 1+3 $\quad$ 1+3+5 $\quad$ 1+3+5+7

Рис. 4

Таким образом, квадратные числа могут быть получены двумя способами:

$$1 = 1^2, \quad 4 = 2^2 = \underbrace{1 + 3}_{\textit{2 числа}},$$

$$9 = 3^2 = \underbrace{1 + 3 + 5}_{\textit{3 числа}},$$

$$16 = 4^2 = \underbrace{1 + 3 + 5 + 7}_{\textit{4 числа}} \text{ и т. д.}$$

Вообще, *квадратное число с номером n равно сумме первых n нечётных чисел.*

Например:

$25 = 5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9, \quad 36 = 6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11.$

10. Представьте в виде суммы последовательных нечётных чисел квадратные числа 81, 100, 169.
11. Великий древнегреческий учёный Диофант (III в. н. э.) нашёл закономерность, связывающую треугольные числа с квадратными числами: *если треугольное число умножить на 8 и к произведению прибавить 1, то получится квадратное число*:

$$\text{треугольное число} \times 8 + 1 = \text{квадратное число}.$$

Проверьте эту закономерность для нескольких первых треугольных чисел.

Ответы, указания, решения

2. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120.

3. Нижняя строка таблицы: 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325.

4. а) $1 + 2 + \ldots + 25 = 325$; б) 630; 1275; 5050.

5. Число 64 не является, число 91 является.

Р е ш е н и е. Этот вывод можно сделать по результатам выполнения задания 2. Можно также получить ответ путём непосредственного суммирования: $91 = 1 + 2 + \ldots + 13$; для числа 64 такой суммы не существует.

6. Р е ш е н и е. Последовательность треугольных чисел состоит из четвёрок, в которых сначала идут два нечётных числа, а затем два чётных: н, н, ч, ч, н, н, ч, ч, ...

Числа с номерами 17, 18, 19, 20 образуют очередную четвёрку, поэтому числа с номерами 17 и 18 — нечётные, а с номерами 19 и 20 — чётные.

Число под номером 60 — последнее в своей четвёрке; оно чётное. Число под номером 78 — второе в своей четвёрке; оно нечётное. Число под номером 35 — третье в своей четвёрке; оно чётное.

7. Р е ш е н и е. Представить число 35 в виде суммы треугольных чисел можно разными способами: $35 = 28 + 6 + 1$; $35 = 21 + 10 + 3 + 1$; $35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1$.

8. б) $20^2 = 400$, $25^2 = 625$, $40^2 = 1600$.

9. Р е ш е н и е. $30 = 25 + 4 + 1 = 5^2 + 2^2 + 1$; $30 = 16 + 9 + 4 + 1 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1$.

10. Р е ш е н и е. Так как $81 = 9^2$, то это число равно сумме девяти последовательных нечётных чисел: $81 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 17$. Число 100 равно сумме десяти последовательных нечётных чисел: $100 = 10^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 19$. Число 169 равно сумме тринадцати последовательных нечётных чисел: $169 = 13^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 25$.

4. Логические задачи

Задача о трёх мудрецах. Как-то три мудреца поспорили, кто из них самый мудрый. Договориться они не смогли и обратились за помощью к случайному прохожему.

«Я помогу вам, — согласился прохожий. — У меня в мешке пять колпаков, три чёрных и два белых. Я надену каждому на голову по колпаку, и тот, кто первым догадается, какого цвета его колпак, тот и есть наимудрейший».

С этими словами прохожий посадил мудрецов друг против друга, завязал им глаза, надел каждому на голову по чёрному колпаку и разрешил снять повязки.

Долго думали мудрецы. Наконец, один из них воскликнул: «На мне чёрный колпак!» Как же он решил задачу, предложенную прохожим?

А рассуждал этот мудрец так:

«Я вижу перед собой два чёрных колпака. Допустим, что на мне колпак белый. Тогда каждый из моих соперников должен был бы рассуждать так: „Передо мной чёрный и белый колпаки. Предположим, что на мне тоже белый колпак. Но тогда тот, кто видит перед собой два белых колпака, сразу должен был бы догадаться, что на нем чёрный. Но он молчит, значит, перед ним нет двух белых колпаков, и на мне чёрный колпак“».

Но оба моих соперника молчат, — продолжал рассуждать мудрец, оказавшийся наимудрейшим. Значит, моё предположение о том, что на мне белый колпак, неверно. У меня на голове чёрный колпак».

Эта старинная задача относится к так называемым *логическим задачам*. Слово «логика» (от греч. logos — «слово», «понятие», «разум») имеет разные значения. Им называют и научную дисциплину, изучающую законы мышления, и ход рассуждений. Логика как наука зародилась много веков тому назад. Её основу заложил выдающийся древнегреческий учёный Аристотель, который жил в 384—322 гг. до н. э.

Решаем логические задачи. Решение логической задачи не требует каких-либо специальных математических знаний, оперирования числами. Ответ на вопрос такой задачи получают с помощью *рассуждений*. Именно в этом и состоит ценность логических задач: умение рассуждать необходимо каждому человеку, а логические задачи, помимо того, что они просто интересны, играют роль «гимнастики ума».

Разберите решения некоторых логических задач, которые приведены ниже, и попробуйте решить сами аналогичные им задачи. При этом пользуйтесь следующим приёмом: выводы, к которым вы будете приходить по ходу рассуждений, сразу же отражайте на заранее подготовленных схемах — так вам будет легче «распутывать» условие. А разобранные решения обязательно читайте с «карандашом в руке», выполняя всё то, что там описано.

Задача 1. Кто какую оценку получил? Аня, Женя и Нина спросили у учительницы математики, какие оценки они получили за контрольную работу. «Догадайтесь сами, — ответила учительница. — А я пока скажу вам только то, что:

1) в вашем классе двоек нет;
2) у вас троих все оценки разные;
3) у Нины не тройка и не пятёрка;
4) у Ани не тройка.

Решение. Заготовим схему, на которой будем отражать выводы, полученные в ходе рассуждений (рис. 1, *а*). Для этого запишем в одном ряду первые буквы имён девочек — А, Ж, Н, а ниже, в другом ряду, — оценки 3, 4, 5 (по условию двоек в классе не было):

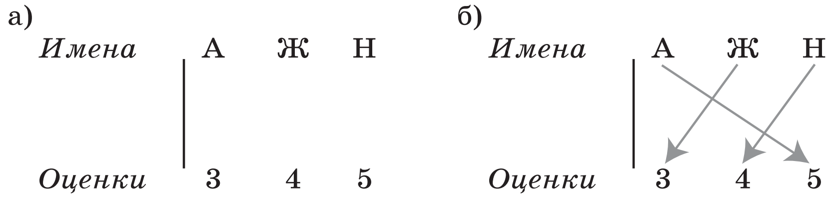


Рис. 1

Из условия 3) следует, что Нина получила четвёрку. Проведём стрелку от буквы Н к цифре 4 (рис. 1, *б*).

У Ани не тройка (см. условие 4), а четвёрка уже «занята» Ниной. Значит, Аня получила пятёрку. Проводим стрелку от буквы А к цифре 5 (см. рис. 1, *б*).

Так как оценки у девочек разные (условие 2), то для Жени остаётся только оценка «3». Соединяем стрелкой букву Ж и цифру 3 (см. рис 1, *б*).

Теперь осталось только прочитать по схеме о т в е т: Аня получила оценку «5», Нина — оценку «4», Женя — оценку «3».

1. Таня, Оля, Света и Наташа во время летних каникул побывали во Франции, Италии и Англии. Выясните, кто из них в какой стране побывал, если известно, что:
   1) две девочки были в одной и той же стране;
   2) в Италию ездила только Оля;
   3) ни Света, ни Наташа в Англию не ездили.
2. На школьной дискотеке Маша, Лиля и Вика были в футболках разных цветов: синей, красной и жёлтой. Известно, что Маша не носит футболки красного цвета, а футболка Лили не была ни красной, ни жёлтой. Футболки каких цветов были на девочках?
3. В школьных соревнованиях по гимнастике первые четыре места заняли Лида, Катя, Зина и Наташа. Известно, что Зина была второй; Наташа хотя и не стала победителем, но в призёры попала; Катя проиграла Наташе. Определите, кто какое место занял.

Задача 2. Кто в каком классе учится? Миша, Серёжа и Толя учатся в разных классах; один — в 5А, другой — в 5Б, третий — в 5В. В шахматном турнире каждый из них защищал честь своего класса. Кто в каком классе учится, если известно, что:

1) первую партию играл Миша и ученик из 5А;

2) вторую партию играл Серёжа и ученик 5В, а Миша в это время отдыхал?

Решение. Из условия 1) следует, что Миша и ученик из 5А — это разные мальчики, значит, Миша учится не в 5А. Из условия 2) понятно, что Миша не учится и в 5В. Таким образом, Миша учится в 5Б. Проведём на схеме соответствующую стрелку (рис. 2).

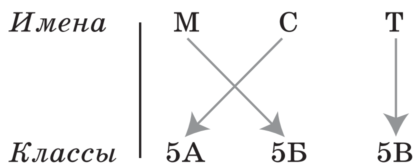


Рис. 2

Из условия 2) понятно также, что Серёжа и ученик из 5В — это разные ребята, т. е. Серёжа в 5В не учится. А так как в 5Б учится Миша, то получается, что Серёжа учится в 5А (см. рис. 2).

Очевидно, что для Толи остается только 5В.

Ответ: Миша учится в 5Б, Серёжа — в 5А, Толя — в 5В.

4. У одноклассников Ивана, Петра и Сергея фамилии Иванов, Петров и Сергеев. Известно, что:
   1) ни у одного из них фамилия не происходит от имени;
   2) Сергей и Петров живут в одном доме.
   Установите фамилию каждого из мальчиков.
5. Школьники Андреев, Борисов, Владимиров и Григорьев имеют имена Андрей, Борис, Владимир и Григорий. Известно, что Владимирова зовут не Борисом, и что только у Григорьева фамилия происходит от его же имени. Назовите имя каждого.

Задача 3. Как одеты клоуны? Три клоуна — Боря, Толя и Коля — выступали в рубашках и шароварах зелёного, жёлтого и синего цвета. При этом:

1) у Бори рубашка и шаровары были одного цвета, а у Толи и Коли — разных цветов;

2) у Толи в костюме не было предметов зелёного цвета;

3) Коля надел синие шаровары, но рубашка у него была не синяя.

Какого цвета были рубашки и шаровары у каждого из клоунов?

Р е ш е н и е. Заготовим схему для выводов (рис. 3, *а*):

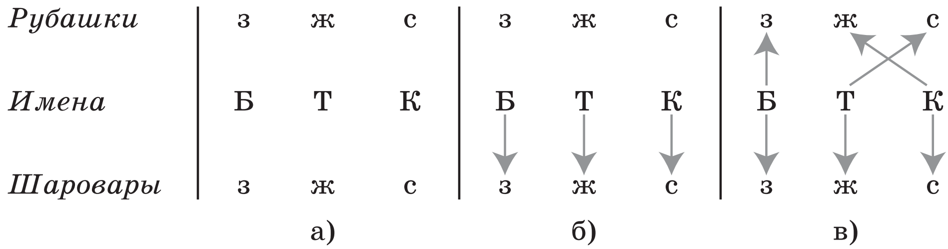


Рис. 3

Прежде всего покажем на схеме, что у Коли шаровары синие (рис. 3, *б*). Будем разбираться с шароварами дальше. Так как у Толи шаровары не зелёные (по условию 2)), а синие уже «заняты», то у него они жёлтые (см. рис. 3, *б*). Понятно, что у Бори шаровары зелёные.

Теперь нетрудно понять, у кого какая рубашка. Для этого обратимся к условию 1. У Бори рубашка, как и шаровары, зелёного цвета, тогда у Толи рубашка синего цвета, а у Коли — жёлтого.

6. Таня, Аня и Катя сшили для карнавала белое, розовое и голубое платья и изготовили маски из тканей тех же цветов. У Ани маска того же цвета, что и платье; у Кати платье белое, но маска другого цвета; Таня не любит розовый цвет и не стала использовать его в своём костюме. Какого цвета были платье и маска у каждой из девочек?
7. Бабушка, мама и внучка решили повесить на новогоднюю ёлку украшения, сделанные своими руками. Одна из них делала фонарики, другая — гирлянды, а третья — вырезала звёздочки; при этом они взяли бумагу разных цветов — синюю, жёлтую и красную. Известно, что фонарики были синие и что внучка выбрала для себя красную бумагу. Внучка делала не гирлянды, а мама не стала делать ни звёздочки, ни гирлянды. Какие украшения и какого цвета делала каждая из них?

Задача 4. Кому какие номера достались? Среди пригласительных билетов на дискотеку оказалось 5 счастливых. Пять обладателей этих билетов должны были разыграть между собой 10 призов. Для этого на десяти карточках написали номера от 1 до 10, затем карточки свернули, бросили в мешок и перемешали. Каждому участнику предложили вытянуть по 2 карточки и получить призы в соответствии с их номерами. Но организатор лотереи решил пошутить и вместо того, чтобы называть два номера, написанные на карточках, вынутые очередным участником, каждый раз указывал их сумму. Поэтому были озвучены такие результаты: Антон — 11, Вера — 4, Денис — 7, Марк — 16, Ольга — 17. Надо установить, какие два номера выпали каждому из участников.

Р е ш е н и е. Выпишем все варианты, которыми могла быть получена каждая сумма. Получим такую таблицу:

Антон (11)	Вера (4)	Денис (7)	Марк (16)	Ольга (17)
10 и 1 9 и 2 8 и 3 7 и 4 6 и 5	<u>3 и 1</u>	6 и 1 5 и 2 4 и 3	10 и 6 9 и 7	10 и 7 9 и 8

Вы видите, что Вера могла набрать свою сумму единственным способом, вытащив карточки с номерами 3 и 1. Подчеркнём этот результат.

Теперь надо исключить номера 1 и 3 у других участников. Посмотрите внимательно на таблицу: у кого из участников они встречаются? Вычеркните эти варианты. Если вы не ошибётесь, то у одного из участников тоже останется единственный вариант; подчеркните его. Закончите самостоятельно решение задачи, рассуждая так же, и сверьтесь с ответом.

Задача 5. Какого цвета шарики в коробочках? Имеются 5 коробочек — белая, красная, синяя, чёрная и зелёная и 10 шариков тех же цветов — 2 белых, 2 красных, 2 синих, 2 чёрных, 2 зелёных. Шарики разложили по коробочкам, в каждую по два шарика. Надо узнать, какого цвета шарики находятся в каждой из коробочек, основываясь на условиях, которые будут даны ниже (условий всего шесть).

Для решения задачи начертите в тетради следующую таблицу:

Коробочка	Шарики				
	Белые	Красные	Синие	Чёрные	Зелёные
Белая					
Красная					
Синяя					
Чёрная					
Зелёная					

Теперь читайте одно за другим приведённые ниже условия, разбирайтесь в выводах и ставьте в клетках своей таблицы карандашом знаки «+» и «–» («+», если шарик лежит в коробочке, «–», если шарик не лежит).

Условия:

1) *Ни один шарик не лежит в коробочке того же цвета, что и он сам.*

Поставьте знак «–» в клетках «белая коробочка — белые шарики», «красная коробочка — красные шарики» и т. д.

2) *В красной коробочке нет синих шариков.*

Поставьте знак «–» в соответствующую клетку таблицы.

3) *В чёрной коробочке лежат шарики холодных тонов, причём их цвета разные.*

Холодными называют синий и зелёный тона. Поставьте знак «+» в клетках «чёрная коробочка — синие шарики» и «чёрная коробочка — зелёные шарики». Чёрная коробочка заполнена. Покажите, что других шариков в ней нет, поставив «–» во все остальные её клетки.

4) *В белой коробочке лежат один красный и один зелёный шарики.*

Поставьте знак «+» в соответствующие клетки таблицы, относящиеся к белой коробочке. Отразите в таблице с помощью знака «–», что других шариков в белой коробочке нет. Теперь посмотрите на таблицу. Заполненные клетки позволяют сделать следующие выводы (объясните каждый из них):

второй синий шарик может лежать только в зелёной коробочке (отметьте это знаком «+»);

ни в красной, ни в синей коробочках нет зелёного шарика (поставьте два раза знак «–»).

И ещё один вывод: в красной коробочке лежат белый и чёрный шарики (поставьте «+» в соответствующих клетках).

5) *В синей коробочке один из шариков чёрного цвета.*

Поставьте «+» в клетке «синяя коробочка — чёрный шарик».

Чёрные шарики разложены, они в красной и синей коробочках. В таблице с помощью знака «–» должно быть показано, что в других коробочках их нет.

6) *В одной из коробочек лежат один белый и один синий шарик.*

Из таблицы видно, что это может быть только зелёная коробочка (объясните почему). Ставим знак «+» в клетку «зелёная коробочка — белый шарик» и знак «–» в остальных клетках, относящихся к этой коробочке.

Наконец, можно сделать последний вывод: в синей коробочке лежат белый и красный шарики.

Ваша таблица должна быть заполнена. Сопоставьте свой результат с ответом. Если ошибок нет, сформулируйте ответ на вопрос задачи.

Ответы, указания, решения

1. Оля была в Италии, Света и Наташа — во Франции, Таня — в Англии.

2. Маша была в жёлтой футболке, Лиля — в синей, Вика — в красной.

3. Лида была первой, Зина — второй, Наташа — третьей, Катя — четвёртой.

4. Фамилия Ивана — Петров, Петра — Сергеев, Сергея — Иванов.

Решение. Из условия 2 понятно, что Сергей — не Петров, но он и не Сергеев; значит, Сергей — это Иванов. Так как Пётр не может быть Петровым, то он Сергеев. Тогда фамилия Ивана — Петров.

5. Андреева зовут Борисом, Борисова — Владимиром, Владимирова — Андреем, Григорьева — Григорием.

Решение. В рассуждении надо идти от фамилий к именам (рис. 4).

Сначала соединим буквы Г и Г в верхней и нижней строках. Далее: так как по условию Владимиров не Борис и он не может быть Владимиром, то он Андрей; соединяем буквы В и А. Для Борисова два варианта имени — Борис и Владимир; но Борисом он быть не может, поэтому соединяем буквы Б и В. Понятно, что Андреев может быть только Борисом.

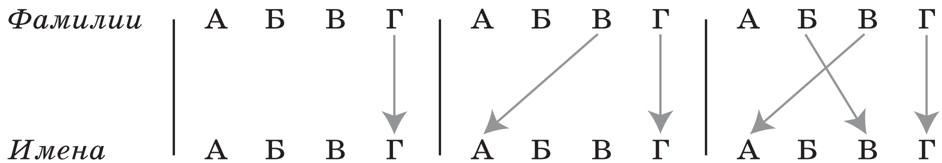


Рис. 4

6. У Тани платье голубое, а маска белая; у Ани и платье, и маска розового цвета; у Кати платье белое, а маска голубая.

7. Бабушка делала жёлтые гирлянды, мама — синие фонарики, а внучка вырезала красные звёздочки.

Задача 4. Антон вытянул номера 7 и 4, Вера — 3 и 1, Денис — 5 и 2, Марк — 6 и 10, Ольга — 9 и 8.

Задача 5. Итоговая таблица:

Коробочка	Шарики				
	Белые	Красные	Синие	Чёрные	Зелёные
Белая	–	+	–	–	+
Красная	+	–	–	+	–
Синяя	–	+	–	+	–
Чёрная	–	–	+	–	+
Зелёная	+	–	+	–	–

Содержание

Учебное издание

Суворова Светлана Борисовна
Кузнецова Людмила Викторовна
Минаева Светлана Станиславовна
Рослова Лариса Олеговна

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации
5 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова*, *Е. В. Трошко*
Художник *Т. В. Глушкова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *О. Ю. Тупикиной*
Техническое редактирование и компьютерная вёрстка *Т. М. Якутович*
Корректор *Е. В. Павлова*